

הקדמה

ספר זה מכיל את כל חומר הלימוד במתמטיקה לשאלון ז' 035007 .
הספר נכתב בהתאם לתוכנית הלימודים של שאלון ז' 035007 , כפי שנוסחה והובהרה
בחוזר מפמ"ר המתמטיקה תשס"ו / 1 , ובהתאם לכל העדכונים שפורסמו באתר מפמ"ר
המתמטיקה. תוכנית הלימודים ומבנה הבחינה מופיעים בעמודים 14 - 11 בספר.

בספר שבעה חלקים:

- חלק א': גיאומטריה אנליטית..... 15 - 248
- חלק ב': וקטורים..... 249 - 503
- חלק ג': מספרים מרוכבים..... 504 - 574
- חלק ד': חזקות ולוגריתמים..... 575 - 696
- חלק ה': חשבון דיפרנציאלי..... 697 - 846
- חלק ו': חשבון אינטגרלי..... 847 - 955
- חלק ז': 54 מבחני חזרה ונספחים..... 956 - 1086

בכל חלק מספר נושאים וכל נושא חולק לפרקים רבים. בכל פרק דוגמאות פתורות
רבות ושאלות לעבודה עצמית עם תשובות סופיות. בצד ימין של השאלות לעבודה
עצמית מופיע פס אפור. שאלות קשות מהרגיל סומנו ב- ★ .

בחלק ז' של הספר מופיעים 54 מבחני חזרה. כל המבחנים הם במתכונת של שאלון ז'
035007 , תואמים את דרישות תוכנית הלימודים ואת בחינות הבגרות האחרונות.
מהדורה זו נבדלת מהמהדורה הקודמת בהרחבה ובהעמקה בחלק התיאורטי
ובדוגמאות הפתורות, ובמגוון גדול מאד של שאלות לעבודה עצמית. בסוף כל חלק
בספר מצוי פרק עם בעיות לחזרה ברמת מבחן הבגרות. (לחלק ה' ולחלק ו' של הספר
פרק בעיות חזרה משותף – ראה עמודים 936 - 955).

זמן ומחשבה רבים הושקעו בבניית הספר ובסדר ההוראה. הפרקים בכל חלק של
הספר מסודרים באופן שמאפשר הוראה רציפה וניצול מירבי של הזמן העומד לרשות
המורה. יחד עם זאת, מורה שיבחר, יוכל ללמד מהספר גם בסדר אחר.

תודה למורים: שחר זק, גילה מנור, שרה ברזילי, מנדל ליקינד, דוד רץ ואריה אופיר
שעזרו לי רבות בהכנת ספר זה. תודה לגיל זלוטניק ולדניאל בריסקמן שעזרו בהקלדת
הספר. לבסוף, תודה לאלון קרפן, שהקליד את החומר ותרם רבות מהידע המתמטי
שלו לעיצוב הסופי של הספר.

גבי יקואל, קרית ביאליק

מהדורת שכפול סיוון תשס"ז, יוני 2008

תוכן העניינים

תוכנית הלימודים ומבנה הבחינה של שאלון ז' 035007 לפי חוזר ס"ו / 1 11 - 14

15 – 248	חלק א': גיאומטריה אנליטית
-----------------	----------------------------------

פרק 1:	מרחק בין שתי נקודות.....	15 - 21
פרק 2:	שיעורי נקודת האמצע של קטע.....	22 - 26
פרק 3:	חלוקת קטע ביחס נתון.....	27 - 33
פרק 4:	משוואת הקו הישר.....	34 - 50
	א. משוואה מפורשת של קו ישר.....	34
	ב. משוואה כללית של קו ישר.....	37
	ג. שיטות נוספות למציאת משוואה של קו ישר.....	38
	1. ג. פתרון של מערכת משוואות.....	38
	2. ג. שימוש בדמיון משולשים.....	38
	3. ג. שימוש בנוסחה $y - y_1 = m(x - x_1)$	39
פרק 5:	יישומים נוספים של משוואת הישר.....	51 - 92
	א. מצבים הדדיים מיוחדים בין ישרים: ישרים מקבילים.....	51
	ב. מצבים הדדיים מיוחדים בין ישרים: ישרים מאונכים.....	56
	ג. המרחק בין נקודה לישר.....	65
	ד. הזווית בין ישרים.....	75
	ה. משוואות חוצי-הזוויות שבין שני ישרים נחתכים.....	83
פרק 6:	המעגל.....	93 - 132
	א. משוואת המעגל.....	93
	1. א. הגדרת המעגל כמקום גיאומטרי ומציאת משוואת המעגל.....	93
	2. א. המצב ההדדי בין ישר ובין מעגל קנוני	
	(ניתוח בגישה של פתרון משוואה ריבועית).....	98
	3. א. המצב ההדדי בין ישר ובין מעגל כללי	
	(ניתוח בעזרת הנוסחה לחישוב מרחק נקודה מישר).....	100
	4. א. התנאים בהם תבנית אלגברית ממעלה שנייה מייצגת משוואה של מעגל..	103
	5. א. המצב ההדדי בין שני מעגלים.....	105

122	ב. משיקים למעגל, תנאי ההשקה של ישר למעגל.....
122	ב.1. משוואת המשיק למעגל בנקודה נתונה עליו.....
124	ב.2. תנאי השקה למעגל : משוואת המשיק למעגל דרך נקודה כלשהי.....
133 - 150	פרק 7: הפרבולה
133	א. משוואת הפרבולה ותיאורה הגרפי.....
143	ב. משיקים לפרבולה, תנאי ההשקה של ישר לפרבולה.....
143	ב.1. משוואת המשיק לפרבולה בנקודה נתונה עליה.....
145	ב.2. תנאי השקה לפרבולה : משוואת המשיק לפרבולה דרך נקודה כלשהי.....
151 - 174	פרק 8: האליפסה
151	א. משוואת האליפסה ותיאורה הגרפי.....
151	א.1. הגדרת האליפסה כמקום גיאומטרי ומציאת משוואת האליפסה.....
155	א.2. קבלת משוואת האליפסה על-ידי כיווץ של מעגל.....
167	ב. המצב ההדדי בין ישר ואליפסה.....
175 - 197	פרק 9: ההיפרבולה
175	א. משוואת ההיפרבולה ותיאורה הגרפי.....
189	ב. המצב ההדדי בין ישר והיפרבולה.....
198 - 219	פרק 10: מקומות גיאומטריים
198	א. מקומות גיאומטריים : שאלות עם קווים ישרים.....
204	ב. מקומות גיאומטריים : שאלות עם משוואת מעגל.....
210	ג. מקומות גיאומטריים : שאלות עם משוואת פרבולה.....
212	ד. מקומות גיאומטריים : שאלות עם משוואת אליפסה.....
216	ה. מקומות גיאומטריים : שאלות עם משוואת היפרבולה.....
220 - 248	פרק 11: גיאומטריה אנליטית – שאלות חזרה
220	• בעיות עם קווים ישרים.....
225	• בעיות עם מעגל.....
229	• בעיות עם פרבולה.....
230	• בעיות עם אליפסה.....
232	• בעיות עם היפרבולה.....
233	• בעיות עם מקומות גיאומטריים.....

249 – 503

חלק ב': וקטורים

- פרק 12: וקטורים בגישה גיאומטרית.** 249 - 278
- א. הגדרת הוקטור וסימונו. 249
- ב. פעולות חשבון בוקטורים. 255
1. כפל של סקלר בוקטור. 255
2. חיבור וקטורים. 256
3. חיסור וקטורים. 258
- ג. תלות לינארית ואי-תלות לינארית בין וקטורים,
- צירוף לינארי של וקטורים, שימושים יסודיים. 261
1. תלות ואי-תלות בין וקטורים. 261
- תלות לינארית בוקטור אחד (תלות של וקטור בוקטור אחר). 261
2. צירוף לינארי (קומבינציה לינארית) של וקטורים. 262
- תלות לינארית בשני וקטורים (תלות של וקטור בשני וקטורים). 264
 - תלות לינארית בשלושה וקטורים (תלות של וקטור בשלושה וקטורים). 264
3. שימושים יסודיים לתלות לינארית של וקטורים. 266
- וקטורים שראשיתם בנקודה אחת ומסתיימים על ישר. 266
 - וקטורים שראשיתם בנקודה אחת ומסתיימים על מישור. 267
- ד. חלוקת קטע ביחס נתון. 273
- פרק 13: פתרון בעיות גיאומטריות באמצעות חשבון חצים.** 279 - 310
- א. פתרון בעיות גיאומטריות במישור על-ידי חשבון חצים. 279
- ב. פתרון בעיות גיאומטריות במרחב על-ידי חשבון חצים. 296
- פרק 14: המכפלה הסקלרית ושימושיה.** 311 - 338
- א. הגדרת המכפלה הסקלרית, חישובים יסודיים. 311
- ב. שימושי המכפלה הסקלרית לפתרון בעיות גיאומטריות במישור ובמרחב. 317
- ג. שימוש במכפלה הסקלרית להוכחת משפטים
- בגיאומטריה אוקלידית של המרחב. 334
- פרק 15: וקטורים בגישה אלגברית.** 339 - 377
- א. הצגה אלגברית של וקטורים. 339
1. הצגה אלגברית של וקטורים במישור. 339
2. הצגה אלגברית של וקטורים במרחב. 344
- ב. המכפלה הסקלרית של וקטורים הנתונים בהצגה אלגברית. 372

פרק 16: ההצגות האלגבריות של ישרים ומישורים במרחב	378 - 441
א. ההצגה הפרמטרית של ישר במרחב	378
ב. המצב ההדדי של שני ישרים במרחב	384
1. תלות לינארית בין שני וקטורים הנתונים בייצוג אלגברי	384
2. מצב הדדי של שני ישרים	385
ג. המשוואה האלגברית הכללית של מישור במרחב	392
1. הגדרת המשוואה הכללית של מישור במרחב, מציאת משוואת המישור לפי שלוש נקודות שעליו, לפי נקודה וישר שעליו ולפי שני ישרים	392
2. נקודות חיתוך של מישור עם הצירים, משפחות של מישורים	398
3. דוגמאות נוספות של שאלות פתורות	
(מישורים המקבילים לצירים, מישורים המכילים צירים)	402
ג. הקשר בין ישר המאונך למישור נתון ובין משוואה כללית של מישור	406
ד. המצב ההדדי של מישורים	411
1. המצב ההדדי של שני מישורים במרחב	411
2. ישר החיתוך של שני מישורים	414
ה. המצב ההדדי של ישר ומישור	421
ו. הצגה פרמטרית של מישור	428
1. ההצגה הפרמטרית של מישור, מעבר בין הצגה פרמטרית למשוואה כללית (ולחיפוף), מצב הדדי בין ישר ומישור בהצגה פרמטרית	428
2. מקרים מיוחדים במציאת הצגה פרמטרית של מישור	438
פרק 17: שימושי המכפלה הסקלרית	
לחישובי זוויות בין ישרים ומישורים	442 - 452
א. זווית בין שני ישרים	442
ב. זווית בין שני מישורים	446
ג. זווית בין ישר ומישור	450
פרק 18: חישובי מרחקים במרחב	453 - 469
א. חישוב המרחק של נקודה ממישור	453
ב. חישוב המרחק של נקודה מישר	459
ג. חישוב המרחק שבין שני ישרים מצטלבים	465

פרק 19: פתרון בעיות גיאומטריות באמצעות וקטורים בייצוג אלגברי	
470 - 483	(כולל שימוש בהצגות האלגבריות השונות של ישרים ומישורים)
פרק 20: וקטורים בגישה גיאומטרית – תרגילי חזרה	484 - 493
פרק 21: וקטורים בגישה אלגברית – תרגילי חזרה	494 - 503

חלק ג': מספרים מרוכבים	504 – 574
-------------------------------	------------------

פרק 22: הצגה אלגברית של מספרים מרוכבים	504 - 520
א. הקדמה והגדרות	504
ב. פעולות חשבון במספרים מרוכבים, פתרון משוואות עם משתנים מרוכבים	505
פרק 23: מישור גאוס והשימוש בו להצגת מספרים מרוכבים	521 - 555
א. הצגת מספרים מרוכבים במישור גאוס	
והצגה קוטבית של מספרים מרוכבים	521
א. 1. מישור גאוס והצגה גיאומטרית של מספרים מרוכבים	521
א. 2. המשמעות הגיאומטרית של חיבור	
שני מספרים מרוכבים במישור גאוס	522
א. 3. הצגה קוטבית (טריגונומטרית) של מספרים מרוכבים	523
א. 4. הקשר בין מספר מרוכב z למספר הצמוד לו $\bar{z}$ במישור גאוס	527
ב. כפל וחילוק של מספרים מרוכבים הנתונים בהצגה קוטבית	532
ב. 1. פעולת הכפל	532
ב. 2. פעולת החילוק	533
ב. 3. כפל של מספר מרוכב ב- i , i^2 , i^3	535
ג. משפט דה-מואבר	542
ג. 1. חזקה של מספר מרוכב הנתון בהצגה קוטבית	542
ג. 2. הוצאת שורש מסדר n ממספר מרוכב	543
ג. 3. שורשי היחידה	545
ג. 4. דוגמא לשימוש במספרים מרוכבים לפתרון בעיה וקטורית במישור	546
פרק 24: תרגילי חזרה במספרים מרוכבים	556 - 574

575 – 696	חלק ד': חזקות ולוגריתמים
575 - 593	פרק 25: אלגברה של חזקות – חזקות ושורשים
575	א. חזרה על חוקי החזקות במעריכים טבעיים ושלמים
581	ב. פעולת השורש
586	ג. מעריך חזקה רציונלי
591	ד. בעיות נוספות עם חזקות
594 - 603	פרק 26: הפונקציה המעריכית a^x
594	א. התיאור הגרפי של הפונקציה המעריכית
598	ב. המספר e והפונקציה e^x
604 - 628	פרק 27: משוואות ואי-שוויונים מעריכיים
604	א. משוואות מעריכיות
616	ב. אי-שוויונים מעריכיים
622	ג. תרגילים נוספים לחזרה במשוואות ואי-שוויונים מעריכיים
629 - 642	פרק 28: לוגריתמים
629	א. פעולת הלוגריתם
635	ב. חוקי הלוגריתמים
643 - 645	פרק 29: הפונקציה הלוגריתמית $\log_a x$
646 - 679	פרק 30: משוואות ואי-שוויונים לוגריתמיים
646	א. משוואות לוגריתמיות
646	א. 1. פתרון משוואות לוגריתמיות פשוטות (שימוש בנוסחאות היסודיות)
649	א. 2. פתרון משוואות לוגריתמיות מהסוג: $\log_a f(x) = \log_a g(x)$
652	א. 3. משוואות לוגריתמיות נוספות
	א. 4. משוואות לוגריתמיות: מעבר לבסיס יחיד
655	(כל הלוגריתמים לפי אותו בסיס)
	א. 5. פתרון משוואות לוגריתמיות ומעריכיות בעזרת
657	הוצאת $\log$ משני אגפי-השוויון
659	א. 6. מערכות משוואות הכוללות משוואה לוגריתמית
662	ב. אי-שוויונים לוגריתמיים
667	ג. תרגילים נוספים לחזרה במשוואות ואי-שוויונים לוגריתמיים

פרק 31: בעיות גידול ודעיכה.....	680 - 692
פרק 32: "חזקות ולוגריתמים" – תרגילי חזרה.....	693 - 696

697 – 846

חלק ה': חשבון דיפרנציאלי

פרק 33: חשבון דיפרנציאלי של הפונקציות $f^r(x)$

כאשר r מספר רציונלי.....	697 - 738
א. הקדמה, תחום הגדרה.....	697
ב. הנגזרת של הפונקציה $f^r(x)$ (r רציונלי)	
ושימושיה למציאת משוואת משיק.....	698
ג. שימושי הנגזרת של הפונקציה $f^r(x)$ (r רציונלי):	
נקודות קיצון מקומיות ומוחלטות, תחומי עלייה וירידה.....	711
ד. שימושי הנגזרת של הפונקציה $f^r(x)$ (r רציונלי):	
נקודות פיתול, תחומי קעירות כלפי מעלה וכלפי מטה.....	718
ה. שימושי הנגזרת של הפונקציה $f^r(x)$ (r רציונלי):	
חקירה מלאה של פונקציות.....	723
ו. שימושי הנגזרת של הפונקציה $f^r(x)$ (r רציונלי): בעיות ערך קיצון.....	735

פרק 34: חשבון דיפרנציאלי של הפונקציה e^x

א. הנגזרת של הפונקציה e^x ושימושיה למציאת משוואת משיק.....	739
ב. שימושי הנגזרת של הפונקציה e^x : מציאת נקודות קיצון מקומיות ומוחלטות, תחומי עלייה וירידה, נקודות פיתול, תחומי קעירות.....	750
ג. שימושי הנגזרת של הפונקציה e^x :	
חקירה מלאה של פונקציות המכילות ביטויים מהצורה $e^{f(x)}$	759
ד. שימושי הנגזרת של הפונקציה e^x : בעיות ערך קיצון עם פונקציות המכילות ביטויים מהצורה $e^{f(x)}$	779

פרק 35: חשבון דיפרנציאלי של הפונקציה a^x

א. הנגזרת של הפונקציה a^x ושימושי הנגזרת.....	786
ב. שימושי הנגזרת של הפונקציה a^x :	
חקירה מלאה של פונקציות המכילות ביטויים מהצורה $a^{f(x)}$	793
ג. שימושי הנגזרת של הפונקציה a^x : בעיות ערך קיצון עם פונקציות המכילות ביטויים מהצורה $a^{f(x)}$	798

פרק 36: חשבון דיפרנציאלי של הפונקציה $\ln x$	799 - 835
א. הנגזרת של הפונקציה $\ln x$ ושימושיה למציאת משוואת משיק	799
ב. שימושי הנגזרת של הפונקציה $\ln x$: מציאת נקודות קיצון מקומיות ומוחלטות, תחומי עלייה וירידה, נקודות פיתול, תחומי קעירות	806
ג. שימושי הנגזרת של הפונקציה $\ln x$: חקירה מלאה של פונקציות המכילות ביטויים מהצורה $\ln f(x)$	811
ד. שימושי הנגזרת של הפונקציה $\ln x$: בעיות ערך קיצון עם פונקציות המכילות ביטויים מהצורה $\ln f(x)$	830
ה. נגזרת הפונקציה x^x	834
פרק 37: חשבון דיפרנציאלי של הפונקציה $\log_a x$	836 - 846
א. הנגזרת של הפונקציה $\log_a x$ ושימושי הנגזרת	836
ב. שימושי הנגזרת של הפונקציה $\log_a x$: חקירה מלאה של פונקציות המכילות ביטויים מהצורה $\log_a f(x)$	841
ג. שימושי הנגזרת של הפונקציה $\log_a x$: בעיות ערך קיצון עם פונקציות המכילות ביטויים מהצורה $\log_a f(x)$	845

847 – 955

חלק ו': חשבון אינטגרלי

פרק 38: חשבון אינטגרלי של הפונקציות $f^r(x)$	847 - 862
כאשר r מספר רציונלי	847
א. האינטגרל הבלתי-מסוים, מציאת פונקציה קדומה	847
ב. האינטגרל המסוים, חישובי שטחים ונפחים	853
ג. אימות אינטגרלים על-ידי גזירה	860
ד. בעיות ערך קיצון עם אינטגרלים	861
פרק 39: חשבון אינטגרלי של פונקציות מעריכיות	863 - 881
המכילות ביטויים מהצורה $e^{f(x)}$	863
א. האינטגרל הבלתי-מסוים, מציאת פונקציה קדומה	863
ב. האינטגרל המסוים, חישובי שטחים ונפחים	868
ג. אימות אינטגרלים על-ידי גזירה	874
ד. בעיות ערך קיצון עם אינטגרלים	880

פרק 40: חשבון אינטגרלי של פונקציות מעריכיות

882 - 890	המכילות ביטויים מהצורה $a^{f(x)}$
882	א. האינטגרל הבלתי-מסוים, מציאת פונקציה קדומה
885	ב. האינטגרל המסוים, חישובי שטחים ונפחים
888	ג. אימות אינטגרלים על-ידי גזירה
889	ד. בעיות ערך קיצון עם אינטגרלים

פרק 41: אינטגרלים של פונקציות שתוצאותיהם

891 - 935	מכילות פונקציות לוגריתמיות
891	א. האינטגרל הבלתי-מסוים, מציאת פונקציה קדומה
905	ב. האינטגרל המסוים, חישובי שטחים ונפחים
921	ג. אימות אינטגרלים על-ידי גזירה
930	ד. בעיות ערך קיצון עם אינטגרלים
933	ה. אינטגרלים הכוללים ביטויים מהצורה $\log_a f(x)$

פרק 42: שאלות חזרה בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

936 - 955	(שאלות חזרה לחלק ה' ולחלק ו')
-----------	-------------------------------------

956 – 1086**חלק ז': מבחני חזרה ונספחים**

956 - 1067	• 54 מבחני חזרה
1068 - 1069	• מיון השאלות לפי נושאים (ממבחני החזרה)
1070 - 1083	• נספח: דטרמיננטות ושימושיהן בוקטורים
1070	א. הגדרות, רקע אלגברי, חישוב דטרמיננטות
1074	ב. המכפלה הוקטורית
1074	1. הגדרה גיאומטרית של המכפלה הוקטורית
1075	2. הגדרה אלגברית של המכפלה הוקטורית
1078	ג. שימוש במכפלה וקטורית למציאת משוואת מישור
1081	ד. שימוש במכפלה וקטורית לחישוב שטחים ונפחים
1081	1. שימוש במכפלה וקטורית לחישוב שטחים של משולש ומקבילית
1083	2. שימוש במכפלה משולשת לחישוב נפחים של טטראדר ומקבילון
1084 - 1086	• נוסחאון במתמטיקה 4-5 יחידות לימוד