

הקדמה

ספר זה, מכיל את כל חומר הלימוד במתמטיקה לשאלון ו' 035006 .

הספר נכתב בהתאם לתוכנית הלימודים של שאלון ו' 035006 , כפי שנוסחה והובהרה בחוזר מפמ"ר המתמטיקה תשס"ו / 1 . התוכנית מופיעה בעמודים 16 - 12 בספר.

בספר חמישה חלקים:

- חלק א': אלגברה..... 17 - 136
- חלק ב': טריגונומטריה..... 137 - 357
- חלק ג': חשבון דיפרנציאלי..... 358 - 740
- חלק ד': חשבון אינטגרלי..... 741 - 845
- חלק ה': 45 מבחני חזרה ונספחים..... 846 - 942

בכל חלק מספר נושאים וכל נושא חולק לפרקים רבים. בכל פרק דוגמאות פתורות רבות ושאלות לעבודה עצמית עם תשובות סופיות. למהדורה זו נוספו שאלות ודוגמאות רבות. הושם דגש מיוחד על מבנה הספר: כל נושאי הלימוד מוצגים בצורה מדורגת ומופיעים בכל הפרקים המתאימים לתוכנית הלימודים. שאלות קשות המיועדות לתלמידים מתקדמים סומנו ב- * .

ברצוני להסב את תשומת לבכם לנושאים חדשים המופיעים בתוכנית הלימודים:

- מציאת תחומי קעירות כלפי מעלה וקעירות כלפי מטה,
 - ומציאת נקודות פיתול בחקירת פונקציות בחשבון דיפרנציאלי.
 - אינטגרציה בשיטת ההצבה בחשבון אינטגרלי.
 - חלוקת פולינומים בפולינום לינארי בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי.
- שאלות בנושאים אלה שובצו בכל פרקי הלימוד המתאימים בספר וכן במבחני החזרה.
- בספר 45 מבחני חזרה המתאימים כולם לדרישות ולמבנה של חוזר מפמ"ר תשס"ו / 1 . שתי הבחינות האחרונות הן בחינות הבגרות שניתנו במועד א' ובמועד ב' בקיץ תשס"ה (עם שינויי מספרים).

תודה למורים: שחר זק, גילה מנור, מנדל ליקינד ואריה אופיר שעזרו לי רבות בהכנת ספר זה. תודה לגיל זלוטניק ולירי זלאצין שעזרו בהקלדת הספר. לבסוף, תודה לאלון קרפן, שהקליד את החומר ותרם רבות מהידע המתמטי שלו לעיצוב הסופי של הספר.

גבי יקואל, קרית ביאליק

מהדורת שכפול תשרי תשס"ו, אוקטובר 2005

תוכן העניינים

תוכנית הלימודים ומבנה הבחינה של שאלון ו' 035006 לפי חוזר ס"ו / 1 12 - 16

17 - 136

חלק א': אלגברה

פרק 1: טכניקה אלגברית - חילוק פולינומים 17 - 24

פרק 2: בעיות מילוליות 25 - 68

א. בעיות תנועה 25

ב. בעיות הספק 40

ג. בעיות תערובת 51

ד. בעיות קנייה ומכירה 60

פרק 3: אי-שוויונים עם ערך מוחלט 69 - 91

א. אי-שוויונים מסוגים שונים עם ערך מוחלט 69

ב. חקירת משוואות, אי-שוויונים ופונקציות ממעלה שנייה

(הכוללים ערך מוחלט) עם פרמטר 87

פרק 4: אינדוקציה מתמטית 92 - 136

א. אישור זהויות 92

• תרגילים יסודיים 101

• אינדוקציות עם שברים 103

• אינדוקציות עם חזקות 104

• אינדוקציות עם סימנים מתחלפים 105

• אינדוקציות שבהן יש תוספת של יותר מאיבר אחד 106

• אינדוקציות שבהן האיבר הראשון משתנה 106

• אינדוקציות עם מכפלות 107

• אינדוקציות עם עצרת 107

• אינדוקציות עבור n זוגי או אי-זוגי 108

• אינדוקציות עם זהויות טריגונומטריות 108

• אינדוקציות שבהן מופיעים טורים בשני אגפי הזהות 109

• שאלות מסוגים שונים 109

112	ב. שימוש באינדוקציה להוכחת התלכדות סדרות
112	ב.1. הוכחת התלכדות סדרות בעזרת אכסיומת האינדוקציה
115	• התלכדות שתי סדרות
117	• שאלות המשלבות התלכדות סדרות וסכום של סדרה
121	ב.2. הוכחת התלכדות סדרות בעזרת אכסיומת האינדוקציה המורחבת
123	ג. התחלקויות במספר נתון
129	• שאלות התחלקות ללא סדרות
131	• שאלות התחלקות עם סדרות
133	ד. אישור אי-שוויונים

137 – 357

חלק ב': טריגונומטריה

137 - 142	פרק 5: טריגונומטריה במשולשים ישרי-זווית
137	א. הגדרת הפונקציות הטריגונומטריות במשולש ישר-זווית
138	ב. שימוש במחשבון
	ג. חישובים במשולש ישר-זווית בעזרת הפונקציות:
140	טנגנס, סינוס או קוסינוס

פרק 6: הפונקציות הטריגונומטריות של זוויות מיוחדות,

143 - 154	זהויות טריגונומטריות יסודיות
	א. סינוס, קוסינוס וטנגנס של זוויות
143	מיוחדות: $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$
143	א.1. זהויות בת 45°
144	א.2. זהויות בנות 30° ו- 60°
148	א.3. זהויות בנות 0° ו- 90°
151	ב. זהויות טריגונומטריות יסודיות

פרק 7: פתרון בעיות עם מצולעים המתפרקים

155 - 168	למשולשים ישרי-זווית
-----------	----------------------------

169 - 192	פרק 8: הרחבת מושג הפונקציות הטריגונומטריות לזוויות כלשהן
169	א. מעגל היחידה
170	ב. הפונקציות סינוס וקוסינוס במעגל היחידה

ג.	חישוב ערכי הסינוס והקוסינוס של זוויות כלשהן.....	172
ד.	פונקצית הטנגנס במעגל היחידה, חישוב ערך הטנגנס של זוויות כלשהן.....	179
ה.	התיאור הגרפי של הפונקציות הטריגונומטריות.....	182
ה.1.	הגרפים של פונקצית הסינוס ושל פונקצית הקוסינוס.....	182
ה.2.	הגרף של פונקצית הטנגנס.....	184
ו.	המחזוריות של הפונקציות הטריגונומטריות.....	185
ז.	הזהות $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ במעגל היחידה.....	188
ח.	הקשר בין פונקצית הטנגנס לשיפוע של ישר.....	191

פרק 9: משוואות טריגונומטריות 193 - 231

א.	משוואות טריגונומטריות מהסוג $f(a \cdot x + c) = b$	193
א.1.	משוואות מהסוג $\sin(a \cdot x + c) = b$	193
א.2.	משוואות מהסוג $\cos(a \cdot x + c) = b$	200
א.3.	משוואות מהסוג $\operatorname{tg}(a \cdot x + c) = b$	205
ב.	מציאת הפתרונות של משוואה טריגונומטרית בתחום מסוים.....	208
ג.	משוואות טריגונומטריות מהסוג $f(x) = f(\alpha)$	212
ג.1.	משוואות מהסוג $\sin x = \sin \alpha$	212
ג.2.	משוואות מהסוג $\cos x = \cos \alpha$	214
ג.3.	משוואות מהסוג $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha$	217
ד.	משוואות טריגונומטריות בהן מופיע ריבוע של פונקציה טריגונומטרית.....	219
ה.	משוואות טריגונומטריות שפתרון מוביל לפתרון משוואות מהמעלה הראשונה.....	223
ו.	משוואות טריגונומטריות שפתרון מוביל לפתרון משוואות מהמעלה השנייה.....	225
ז.	משוואות מסוגים שונים: תרגילים נוספים לחזרה על סעיפים (א) – (ו) שבפרק זה.....	228
ח.	משוואות הומוגניות.....	230

פרק 10: נוסחאות מתקדמות בפונקציות טריגונומטריות 232 - 254

א.	הפונקציות הטריגונומטריות של סכום והפרש זוויות.....	232
ב.	הפונקציות הטריגונומטריות של זווית כפולה.....	241
ג.	הפונקציות הטריגונומטריות של חצי זווית.....	245

ד.	משוואות נוספות מסוגים שונים : חזרה והרחבה	
248	לסעיפים (א), (ב), (ג) שבפרק זה.....	
251	ה. הנוסחאות לחישוב סכום או הפרש של פונקציות טריגונומטריות.....	
255 - 287	פרק 11: התרת משולש כללי	
255	א. משפט הסינוסים.....	
271	ב. משפט הקוסינוסים.....	
	ג. שאלות נוספות לחזרה עם שימוש	
282	במשפט הסינוסים ו/או במשפט הקוסינוסים.....	
288 - 325	פרק 12: יישומים במרחב של הפונקציות הטריגונומטריות	
297	• בעיות העוסקות בחישובי זוויות ומרחקים במרחב.....	
299	• בעיות העוסקות בקוביה.....	
300	• בעיות העוסקות בתיבה.....	
306	• בעיות העוסקות במנסרה שבסיסה משולש שווה-צלעות.....	
307	• בעיות העוסקות במנסרה שבסיסה משולש שווה-שוקיים.....	
309	• בעיות העוסקות במנסרה שבסיסה משולש ישר-זווית.....	
310	• בעיות העוסקות בפירמידה שבסיסה ריבוע.....	
314	• בעיות העוסקות בפירמידה שבסיסה מלבן.....	
316	• בעיות העוסקות בפירמידה שבסיסה משולש.....	
318	• בעיות העוסקות בפירמידות מסוגים נוספים.....	
319	• בעיות העוסקות בגליל.....	
321	• בעיות העוסקות בחרוט.....	
326 - 354	פרק 13: שאלות חזרה בטריגונומטריה	
326	א. בעיות טריגונומטריות במישור.....	
340	ב. בעיות טריגונומטריות במרחב.....	
355 - 357	פרק 14: נוסחאות בטריגונומטריה	

358 - 363	פרק 15: הגדרות ומושגים (מבוא לחשבון דיפרנציאלי).....
364 - 371	פרק 16: גבול של פונקציה.....

פרק 17: שיפוע של גרף הפונקציה,**הגדרת הנגזרת של פונקציה בנקודה**

372 - 378

- א. שיפוע של ישר..... 372
- ב. שיפוע של פונקציות שהגרף שלהן אינו קו ישר..... 373

פרק 18: פונקצית הנגזרת, נגזרת של פולינום

379 - 394

- א. חישוב הנגזרת של פונקצית החזקה x^n 379
- ב. כללי הגזירה היסודיים..... 381
- ג. שיפוע הגרף בנקודה..... 386

פרק 19: משוואת המשיק לגרף הפונקציה

395 - 405

פרק 20: תחומי העלייה ותחומי הירידה**של פונקציה, נקודות קיצון**

406 - 427

- א. שימוש בנגזרת למציאת תחומי עלייה ותחומי ירידה של פונקציה..... 406
- ב. שימוש בנגזרת ובטבלת חקירה למציאת נקודות קיצון..... 411
- ג. שימוש בנגזרת השנייה לאיפיון נקודות קיצון..... 415

פרק 21: נקודות פיתול, קעירות כלפי מעלה, קעירות כלפי מטה

428 - 439

פרק 22: חקירה מלאה של פונקציות פולינום

440 - 452

פרק 23: חקירת פונקציה בקטע סגור

453 - 462

פרק 24: פונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית

463 - 471

- א. הגדרות..... 463
- ב. הגרפים של פונקציה זוגית ושל פונקציה אי-זוגית..... 464

פרק 25: חקירת פונקציות המכילות ביטויים עם ערך מוחלט

472 - 476

פרק 26: שאלות על גרפים של פונקציה ונגזרותיה**כשהפולינום המייצג אותן אינו נתון**

477 - 485

פרק 27: בעיות ערך קיצון (בעיות מקסימום ומינימום)

486 - 514

- א. בעיות מספרים..... 488
- ב. בעיות גיאומטריות במישור..... 491
- ג. בעיות עם פונקציות וגרפים..... 499

- ד. בעיות גיאומטריות במרחב.....507
ה. בעיות הקשורות למחירים (בעיות כלכליות).....512

פרק 28: כללי גזירה נוספים 515 - 528

- א. הנגזרת של מכפלת פונקציות.....515
ב. הנגזרת של פונקציה מורכבת.....520
ג. נגזרת המנה של שתי פונקציות.....522
ד. שימוש בכללי נגזרת המכפלה ובנגזרת של פונקציה מורכבת לפתרון בעיות בחקירת פונקציות ובעיות ערך קיצון.....526

פרק 29: חקירת הפונקציות $1/x$ ו- $1/f(x)$ 529 - 568

- א. התנהגות פונקציות בסביבת נקודות אי-הגדרה: אסימפטוטות אנכיות.....529
ב. הנגזרת ושימושיה.....536
• חישובי נגזרות, משיקים.....540
• נקודות קיצון מקומיות, תחומי עלייה וירידה.....542
• נקודות קיצון מוחלטות.....544
• נקודות פיתול, תחומי קעירות כלפי מעלה וכלפי מטה.....544
ג. חקירה מלאה של פונקציות.....549
ד. בעיות ערך קיצון.....560
• בעיות מספרים.....561
• בעיות גיאומטריות במישור.....561
• בעיות עם פונקציות וגרפים.....562
• בעיות גיאומטריות במרחב.....565
• בעיות הקשורות למחירים (בעיות כלכליות).....566

פרק 30: חקירת הפונקציות $\sqrt{x}$ ו- $\sqrt{f(x)}$ 569 - 601

- א. הנגזרת ושימושיה.....569
• חישובי נגזרות, משיקים.....573
• נקודות קיצון מקומיות, תחומי עלייה וירידה.....575
• נקודות קיצון מוחלטות.....576
• נקודות פיתול, תחומי קעירות כלפי מעלה וכלפי מטה.....577
ב. חקירה מלאה של פונקציות.....581

592.....	ג. בעיות ערך קיצון.....
592	• בעיות מספרים.....
592	• בעיות גיאומטריות במישור.....
594	• בעיות עם פונקציות וגרפים.....
598.....	• בעיות גיאומטריות במרחב.....
600	• בעיות הקשורות לתנועה.....
602 - 660	פרק 31: חקירת פונקציות רציונליות וחקירת פונקציות מנה
	א. התנהגות הפונקציה הרציונלית בסביבת נקודות
602.....	אי-ההגדרה שלה: אסימפטוטות אנכיות ונקודות "חור".....
606.....	ב. אסימפטוטות אופקיות של פונקציות רציונליות.....
611.....	ג. חקירה מלאה של פונקציות רציונליות.....
	• תרגילים ללא מציאת נקודות פיתול
620	ותחומי קעירות כלפי מעלה ומטה.....
	• תרגילים הכוללים מציאת נקודות פיתול
621	ותחומי קעירות כלפי מעלה ומטה.....
627	ד. נקודות קיצון מוחלטות של פונקציה רציונלית.....
630	ה. חקירת פונקציות רציונליות עם פרמטרים.....
644.....	ו. בעיות ערך קיצון.....
645	• בעיות הקשורות לתנועה.....
645	• בעיות מספרים.....
646	• בעיות עם פונקציות וגרפים.....
648	• בעיות גיאומטריות במישור.....
649	• בעיות גיאומטריות במרחב.....
651.....	• בעיות הקשורות למחירים (בעיות כלכליות).....
653	ז. חקירת פונקציות מנה המכילות ביטויים עם שורשים ריבועיים.....
653	• נגזרות ומשיקים: תרגילים עם ובלי פרמטרים.....
654.....	• חקירה מלאה של פונקציות עם שורשים: תרגילים ללא פרמטרים.....
655	• חקירה מלאה של פונקציות עם שורשים: תרגילים עם פרמטרים.....
661 - 666	פרק 32: הנגזרת של פונקציה סתומה

פרק 33: הפונקציות הטריגונומטריות 667 - 727

- א. שימוש ברדיאנים..... 667
- ב. פתרון כללי של משוואות טריגונומטריות פשוטות
- כאשר הזוויות נמדדות ברדיאנים..... 670
- ב.1. משוואות מהסוג $\sin x = b$ 670
- ב.2. משוואות מהסוג $\cos x = b$ 672
- ב.3. משוואות מהסוג $\operatorname{tg} x = b$ 673
- ג. פתרון כללי של המשוואות $\sin ax = b$, $\cos ax = b$
- ו- $\operatorname{tg} ax = b$ כאשר הזוויות נמדדות ברדיאנים..... 674
- ד. הנגזרות של הפונקציות הטריגונומטריות ושימושיהן..... 675
- חישובי נגזרות ומציאת משוואות משיקים..... 682
 - מציאת תחומי עלייה וירידה,
- מציאת נקודות קיצון מקומיות ומוחלטות..... 687
- מציאת תחומי קעירות כלפי מעלה וכלפי מטה,
- מציאת נקודות פיתול..... 690
- תרגילים מסוגים נוספים..... 691
- ה. חקירה מלאה של פונקציות טריגונומטריות..... 699
- ו. בעיות ערך קיצון..... 717

פרק 34: המהירות הרגעית כנגזרת של הדרך 728 - 738

- א. תנועה בקו ישר במהירות קבועה..... 728
- ב. מציאת מהירות ממוצעת כאשר הגוף לא נע במהירות קבועה..... 729
- ג. מציאת מהירות רגעית כאשר הגוף לא נע במהירות קבועה..... 731

פרק 35: נוסחאות בחשבון דיפרנציאלי 739 - 740

741 – 845

חלק ד': חשבון אינטגרלי

פרק 36: האינטגרל הבלתי-מסוים 741 - 750

כללי אינטגרציה, אינטגרלים $\int f(x) dx$ פולינומים, אינטגרלים $\int f(x) dx$ פונקציות רציונליות,
אינטגרלים $\int f(x) dx$ פונקציות עם שורשים ריבועיים, אינטגרלים $\int f(x) dx$ פונקציות מורכבות
עם פונקציה פנימית לינארית, שימוש בפירוק לגורמים ובחלוקת פולינומים לחישוב אינטגרלים.

פרק 37: שיטות נוספות לחישוב אינטגרלים 751 - 756

- א. אימות אינטגרלים על-ידי גזירה..... 751
- ב. אינטגרציה בשיטת ההצבה (החלפת משתנה באינטגרל)..... 752

פרק 38: מציאת פונקציה קדומה על-פי**נגזרותיה ונתונים נוספים 757 - 766**

- חישוב אינטגרלים לפי הכללים היסודיים..... 759
- אימות אינטגרלים על-ידי גזירה..... 764
- אינטגרציה בשיטת ההצבה..... 764

פרק 39: האינטגרל המסוים 767 - 772

- חישוב אינטגרלים לפי הכללים היסודיים..... 768
- אימות אינטגרלים על-ידי גזירה..... 770
- אינטגרציה בשיטת ההצבה..... 770
- תרגילים מסוגים נוספים..... 771

פרק 40: חישובי שטחים בעזרת אינטגרלים 773 - 801

- תרגילים עם פולינומים : שטחים ללא משיק..... 783
כולל תרגילים עם חילוק פולינומים.
- תרגילים עם פולינומים : שטחים עם משיק..... 789
כולל תרגילים עם חילוק פולינומים.
- תרגילים עם פונקציות נוספות : שטחים ללא משיק..... 791
- תרגילים עם פונקציות נוספות : שטחים עם משיק..... 795
- אימות אינטגרלים על-ידי גזירה..... 797
- אינטגרציה בשיטת ההצבה..... 798

פרק 41: חישובי נפחים בעזרת אינטגרלים (נפח של גוף סיבוב) 802 - 814

כולל תרגילים עם פולינומים, פונקציות רציונליות, פונקציות עם שורש ריבועי, תרגילים עם חילוק פולינומים, תרגילים עם אינטגרציה בשיטת ההצבה.

פרק 42: בעיות ערך קיצון עם אינטגרלים 815 - 818

- תרגילים עם אינטגרל מסוים..... 815
- תרגילים עם חישובי שטחים ונפחים..... 816

פרק 43: אינטגרלים של פונקציות טריגונומטריות 819 - 844

- א. אינטגרלים בלתי-מסוימים, מציאת פונקציה קדומה. 819.....
- אינטגרלים בלתי-מסוימים. 820
 - אינטגרלים בלתי-מסוימים: אימות אינטגרלים על-ידי גזירה. 822
 - אינטגרלים בלתי-מסוימים: אינטגרציה בשיטת ההצבה. 822
 - מציאת פונקציה קדומה. 823.....
 - מציאת פונקציה קדומה: אינטגרציה בשיטת ההצבה. 825
- ב. אינטגרלים מסוימים, חישובי שטחים. 828
- אינטגרלים מסוימים. 829
 - אינטגרלים מסוימים: אימות אינטגרלים על-ידי גזירה. 830.....
 - אינטגרלים מסוימים: אינטגרציה בשיטת ההצבה. 831.....
 - חישובי שטחים: שטחים ללא משיק. 831
 - חישובי שטחים: שטחים עם משיק. 836.....
 - חישובי שטחים: אימות אינטגרלים על-ידי גזירה. 838.....
 - חישובי שטחים: אינטגרציה בשיטת ההצבה. 838
 - בעיות ערך קיצון. 839.....
- ג. חישובי נפחים. 842
- פרק 44: נוסחאות בחשבון אינטגרלי 845**

846 – 942

חלק ה': מבחני חזרה ונספחים

- **45 מבחני חזרה** 846 - 936
- **מיון השאלות לפי נושאים (ממבחני החזרה)** 937 - 938
- **נוסחאון במתמטיקה 4-5 יחידות לימוד** 939 - 942