

הקדמה

ספר זה, מכיל את כל חומר הלימוד במתמטיקה לשאלון ד' 035004 .

הספר נכתב בהתאם לתוכנית הלימודים של שאלון ד' 035004 , כפי שנוסחה והובחרה בחוזר מפמ"ר המתמטיקה תשס"ו / 1 ומופיעה בעמודים 10-13 בספר.

בספר שישה חלקים :

- חלק א': טכניקה אלגברית..... 14 - 51
- חלק ב': חזקות ולוגריתמים (כולל בעיות גידול ודעיכה)..... 52 - 153
- חלק ג': טריגונומטריה..... 154 - 414
- חלק ד': חשבון דיפרנציאלי..... 415 - 648
- חלק ה': חשבון אינטגרלי..... 649 - 738
- חלק ו': 35 מבחני חזרה ונספחים..... 739 - 814

בכל חלק מספר נושאים וכל נושא חולק לפרקים רבים. בכל פרק דוגמאות פתורות רבות ושאלות לעבודה עצמית עם תשובות סופיות.

למהדורה זו נוספו שאלות ודוגמאות רבות.

שאלות קשות המיועדות בדרך-כלל לתלמידים מתקדמים סומנו ב- * .

בספר 35 מבחני חזרה המתאימים כולם לדרישות ולמבנה של חוזר מפמ"ר תשס"ו / 1 . שתי הבחינות האחרונות הן בחינות הבגרות שניתנו במועד א' ובמועד ב' בקיץ תשס"ה (עם שינויי מספרים).

תודה למורים : שחר זק, גילה מנור, מנדל ליקינד ואריה אופיר שעזרו לי רבות בהכנת ספר זה. לבסוף, תודה לאלון קרפן, שהקליד את החומר ותרם רבות מהידע המתמטי שלו לעיצוב הסופי של הספר.

גבי יקואל, קרית ביאליק

מהדורת שכפול אלול תשס"ה, ספטמבר 2005

תוכן העניינים

תוכנית הלימודים ומבנה הבחינה של **שאלון ד' 035004** לפי חוזר ס"ו / 1 10 - 13

14 – 51

חלק א': טכניקה אלגברית

פרק 1: פירוק לגורמים ופתרון משוואות 14 - 35

- א. נוסחאות הכפל המקוצר ופירוק לגורמים..... 14
- ב. משוואות לינאריות בנעלם אחד (כולל שימוש בפירוק לגורמים)..... 21
- ג. מערכות של שתי משוואות לינאריות בשני נעלמים..... 24
- ד. משוואות ריבועיות בנעלם אחד..... 25
- ה. שימוש בפירוק לגורמים לפתרון משוואות ריבועיות..... 26
- ו. מערכות משוואות בשני נעלמים המובילות לפתרון משוואה ריבועית..... 32
- ז. משוואות ממעלה שלישית ויותר..... 35

פרק 2: פתרון אי-שוויונים 36 - 46

- א. פתרון אי-שוויונים ממעלה ראשונה בנעלם אחד..... 36
- ב. מערכות של אי-שוויונים..... 38
- ג. אי-שוויונים ריבועיים (ממעלה שנייה)..... 40
- ד. אי-שוויונים של מנה של פונקציות לינאריות..... 44

פרק 3: משוואות אי-רציונליות פשוטות 47 - 51

- א. מציאת תחום ההגדרה של פונקציות המכילות.....
- ביטויים עם שורשים ריבועיים..... 47
- ב. פתרון משוואות אי-רציונליות פשוטות..... 50

52 – 153

חלק ב': חזקות ולוגריתמים

פרק 4: אלגברה של חזקות - חזקות ושורשים 52 - 95

- א. חזרה על חוקי החזקות במעריכים טבעיים ושלמים..... 52
- ב. פעולת השורש..... 58
- ג. מעריך חזקה רציונלי..... 63
- ד. התיאור הגרפי של הפונקציה המעריכית $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$)..... 71

ה. המספר e	75
ו. משוואות מעריכיות	82
ז. אי-שוויונים מעריכיים	91
ח. תרגילים נוספים לחזרה על הנושאים שבפרק 4	94
פרק 5: לוגריתמים	
א. פעולת הלוגריתם	96
ב. חוקי הלוגריתמים	102
ג. התיאור הגרפי של הפונקציה הלוגריתמית $y = \log_a x$	
.....($a > 0$, $a \neq 1$)	110
ד. משוואות לוגריתמיות	113
ד.1 פתרון משוואות לוגריתמיות פשוטות	113
ד.2 פתרון משוואות לוגריתמיות מהסוג: $\log_a f(x) = \log_a g(x)$	116
ד.3 משוואות לוגריתמיות נוספות	119
ד.4 משוואות לוגריתמיות: מעבר לבסיס יחיד	
.....(כל הלוגריתמים לפי אותו בסיס)	121
ד.5 פתרון משוואות לוגריתמיות ומעריכיות בעזרת	
הוצאת $\log$ משני אגפי-השוויון	123
ד.6 מערכות משוואות הכוללות משוואה לוגריתמית	126
ה. אי-שוויונים לוגריתמיים	127
ו. תרגילים נוספים לחזרה על הנושאים שבפרק 5	130
פרק 6: בעיות גידול ודעיכה	
.....	138 - 153

פרק 7: הגדרת הפונקציות הטריגונומטריות במשולש ישר-זווית	
א. הטנגנס של זווית חדה	154
א.1 הטנגנס מהו?	154
א.2 חישוב זוויות בעזרת פונקצית הטנגנס	157
א.3 שימוש בפונקצית הטנגנס לחישוב זווית גובה	160
א.4 שימוש בפונקצית הטנגנס לחישוב עומק	163
ב. הסינוס של זווית חדה	166

- ג. הקוסינוס של זווית חדה.....170
- ד. חישובים במשולש ישר-זווית בעזרת הפונקציות :
טנגנס, סינוס או קוסינוס.....175

פרק 8: פתרון בעיות עם מצולעים המתפרקים

178 - 228

למשולשים ישרי-זווית

- א. חישובי שטחים של משולשים ומרובעים.....178
- א.1 חישוב שטח של משולש ישר-זווית, משולש שווה-שוקיים וטרפז.....178
- א.2 חישוב שטח של משולש על-פי שתי צלעות והזווית הכלואה ביניהן.....183
- ב. בעיות עם אותיות (פרמטרים).....192
- ג. בעיות עם מצולע משוכלל.....199
- ד. בעיות מסוגים שונים.....203
- ה. בעיות מסוגים שונים עם אותיות (פרמטרים).....217

פרק 9: הפונקציות הטריגונומטריות של זוויות מיוחדות,

229 - 240

זהויות טריגונומטריות יסודיות

- א. סינוס, קוסינוס וטנגנס של זוויות
מיוחדות: $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$229
- א.1 זווית בת 45°229
- א.2 זוויות בנות 30° ו- 60°230
- א.3 זוויות בנות 0° ו- 90°234
- ב. זהויות טריגונומטריות יסודיות.....237

פרק 10: הרחבת מושג הפונקציות הטריגונומטריות לזוויות כלשהן 241 - 261

- א. מעגל היחידה.....241
- ב. הפונקציות סינוס וקוסינוס במעגל היחידה.....242
- ג. חישוב ערכי הסינוס והקוסינוס של זוויות כלשהן.....244
- ד. פונקצית הטנגנס במעגל היחידה, חישוב ערך הטנגנס של זוויות כלשהן.....250
- ה. התיאור הגרפי של הפונקציות הטריגונומטריות.....253
- ה.1 הגרפים של פונקצית הסינוס ושל פונקצית הקוסינוס.....253
- ה.2 הגרף של פונקצית הטנגנס.....255
- ו. המחזוריות של הפונקציות הטריגונומטריות.....256
- ז. הזהות $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ במעגל היחידה.....259

פרק 11: משוואות טריגונומטריות	262 - 303
א. משוואות טריגונומטריות מהסוג $f(x) = b$	262
1. משוואות מהסוג $\sin x = b$	262
2. משוואות מהסוג $\cos x = b$	266
3. משוואות מהסוג $\operatorname{tg} x = b$	269
ב. מציאת הפתרונות של משוואה טריגונומטרית בתחום מסוים.....	270
ג. משוואות טריגונומטריות מהסוג $f(a \cdot x + c) = b$	274
1. משוואות מהסוג $\sin(a \cdot x + c) = b$	274
2. משוואות מהסוג $\cos(a \cdot x + c) = b$	277
3. משוואות מהסוג $\operatorname{tg}(a \cdot x + c) = b$	279
ד. משוואות טריגונומטריות מהסוג $f(x) = f(\alpha)$	282
1. משוואות מהסוג $\sin x = \sin \alpha$	282
2. משוואות מהסוג $\cos x = \cos \alpha$	284
3. משוואות מהסוג $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha$	287
ה. משוואות טריגונומטריות בהן מופיע ריבוע של פונקציה טריגונומטרית.....	289
ו. משוואות טריגונומטריות שפתרון מוביל לפתרון משוואות מהמעלה הראשונה.....	293
ז. משוואות טריגונומטריות שפתרון מוביל לפתרון משוואות מהמעלה השנייה.....	295
ח. משוואות מסוגים שונים: תרגילים נוספים לחזרה על סעיפים (א) – (ז) שבפרק זה.....	298
ט. משוואות הומוגניות.....	300
י. משוואות אי-הומוגניות (ממעלה ראשונה) – משוואות מהצורה $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$	302
פרק 12: נוסחאות מתקדמות בפונקציות טריגונומטריות	304 - 316
א. הפונקציות הטריגונומטריות של סכום והפרש זוויות.....	304
ב. הפונקציות הטריגונומטריות של זווית כפולה.....	313
פרק 13: התרת משולש כללי	317 - 347
א. משפט הסינוסים.....	317
ב. משפט הקוסינוסים.....	333

ג. שאלות נוספות לחזרה עם שימוש

344 במשפט הסינוסים ו/או במשפט הקוסינוסים

פרק 14: יישומים במרחב של הפונקציות הטריגונומטריות 348 - 398

356 בעיות העוסקות בחישובי זוויות ומרחקים במרחב

360 בעיות העוסקות בקוביה

362 בעיות העוסקות בתיבה

370 בעיות העוסקות במנסרה שבסיסה משולש שווה-צלעות

372 בעיות העוסקות במנסרה שבסיסה משולש שווה-שוקיים

374 בעיות העוסקות במנסרה שבסיסה משולש ישר-זווית

375 בעיות העוסקות בפירמידה שבסיסה ריבוע

381 בעיות העוסקות בפירמידה שבסיסה מלבן

384 בעיות העוסקות בפירמידה שבסיסה משולש

388 בעיות העוסקות בפירמידות מסוגים נוספים

388 בעיות העוסקות בגליל

391 בעיות העוסקות בחרוט

פרק 15: שאלות חזרה בטריגונומטריה 399 - 411

399 משוואות טריגונומטריות

400 בעיות טריגונומטריות במישור

406 בעיות טריגונומטריות במרחב

פרק 16: נוסחאות בטריגונומטריה 412 - 414

415 – 648

חלק ד': חשבון דיפרנציאלי

פרק 17: פונקציות חזקה עם מעריך רציונלי 415 - 418

פרק 18: פונקציות רציונליות 419 - 484

א. התנהגות הפונקציה הרציונליות בסביבת נקודות

419 אי-ההגדרה שלה (אסימפטוטות אנכיות)

427 אסימפטוטה אנכית לעומת מצב של "חור" בגרף

429 אסימפטוטות אופקיות של פונקציות רציונליות

437 נגזרת המנה של שתי פונקציות

444 חקירה מלאה של פונקציה רציונלית

461	ו. נקודות קיצון מוחלטות של פונקציה רציונלית.....
466	ז. חקירת פונקציות רציונליות עם פרמטר.....
476	ח. בעיות ערך קיצון.....
485 - 500	פרק 19: פונקציות המכילות ביטויים עם שורשים ריבועיים
485	• נגזרות ומשיקים: תרגילים עם ובלי פרמטרים.....
488	• חקירה מלאה של פונקציות עם שורשים: תרגילים ללא פרמטרים.....
489	• חקירה מלאה של פונקציות עם שורשים: תרגילים עם פרמטרים.....
490	• נקודות קיצון מוחלטות של פונקציות עם שורשים.....
491	• בעיות ערך קיצון.....
501 - 551	פרק 20: הפונקציה המעריכית $y = e^x$
501	א. הנגזרת של הפונקציה המעריכית e^x
	ב. משיקים לגרף הפונקציה המעריכית e^x , עלייה וירידה,
507	נקודות קיצון מקומיות ומוחלטות.....
521	ג. חקירת פונקציות המכילות ביטויים עם e^x (ללא פרמטרים).....
535	ד. חקירת פונקציות המכילות ביטויים עם e^x (עם פרמטרים).....
542	ה. בעיות ערך קיצון.....
552 - 565	פרק 21: הפונקציה המעריכית $y = a^x$
552	א. הנגזרת של הפונקציה המעריכית a^x
	ב. משיקים לגרף הפונקציה המעריכית a^x , עלייה וירידה,
554	נקודות קיצון מקומיות ומוחלטות.....
	ג. חקירת פונקציות המכילות ביטויים עם a^x (עם ובלי פרמטרים),
560	בעיות ערך קיצון.....
566 - 591	פרק 22: הפונקציה הלוגריתמית $y = \ln x$
566	א. הנגזרת של הפונקציה הלוגריתמית $\ln x$
	ב. משיקים לגרף הפונקציה הלוגריתמית $\ln x$, עלייה וירידה,
569	נקודות קיצון מקומיות ומוחלטות.....
577	ג. חקירת פונקציות המכילות ביטויים עם $\ln x$ (ללא פרמטרים).....
584	ד. חקירת פונקציות המכילות ביטויים עם $\ln x$ (עם פרמטרים).....
587	ה. בעיות ערך קיצון.....

פרק 23: הפונקציה הלוגריתמית $y = \log_a x$

592 - 597

- נגזרות, משיקים, נקודות קיצון מקומיות ומוחלטות. 593
- חקירה מלאה של פונקציות. 594

פרק 24: הפונקציות הטריגונומטריות

598 - 646

- א. שימוש ברדיאנים. 598
- ב. פתרון כללי של משוואות טריגונומטריות פשוטות
 - כאשר הזוויות נמדדות ברדיאנים. 601
 - ב.1 משוואות מהסוג $\sin x = b$. 601
 - ב.2 משוואות מהסוג $\cos x = b$. 603
 - ב.3 משוואות מהסוג $\operatorname{tg} x = b$. 604
- ג. פתרון כללי של המשוואות $\cos ax = b$, $\sin ax = b$
 - ו- $\operatorname{tg} ax = b$ כאשר הזוויות נמדדות ברדיאנים. 605
- ד. הנגזרות של הפונקציות הטריגונומטריות ושימושיהן. 606
 - חישובי נגזרות ומציאת משוואות משיקים. 613
 - מציאת תחומי עלייה וירידה,
- ה. מציאת נקודות קיצון מקומיות ומוחלטות. 618
- ו. חקירה מלאה של פונקציות טריגונומטריות. 628
- ז. בעיות ערך קיצון. 638
- ז. תרגילים המשלבים פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות
 - עם פונקציות טריגונומטריות. 645

פרק 25: נוסחאות בחשבון דיפרנציאלי

647 - 648

649 - 738

חלק ה': חשבון אינטגרלי**פרק 26: אינטגרלים של פונקציות עם שורשים**

649 - 656

- אינטגרלים בלתי-מסוימים. 649
- מציאת פונקציה קדומה. 650
- אינטגרלים מסוימים. 651
- חישובי שטחים. 651
- אימות אינטגרלים על-ידי גזירה. 655

פרק 27: אינטגרלים של פונקציות חזקה עם מעריך רציונלי,

657 - 682

אינטגרלים של פונקציות רציונליות

- א. אינטגרלים בלתי-מסוימים, מציאת פונקציה קדומה. 657.....
- ב. אינטגרלים מסוימים, חישובי שטחים. 666.....
- ג. אימות אינטגרלים על-ידי גזירה. 681.....

683 - 705

פרק 28: אינטגרלים של פונקציות מעריכיות

- א. אינטגרלים בלתי-מסוימים, מציאת פונקציה קדומה. 683.....
- ב. אינטגרלים מסוימים, חישובי שטחים. 689.....
- ג. אימות אינטגרלים על-ידי גזירה. 701.....

706 - 718

פרק 29: אינטגרלים עם פונקציות לוגריתמיות

- א. אינטגרלים בלתי-מסוימים, מציאת פונקציה קדומה. 706.....
- ב. אינטגרלים מסוימים, חישובי שטחים. 710.....
- ג. אימות אינטגרלים על-ידי גזירה. 717.....

719 - 737

פרק 30: אינטגרלים של פונקציות טריגונומטריות

- א. אינטגרלים בלתי-מסוימים, מציאת פונקציה קדומה. 719.....
- ב. אינטגרלים מסוימים, חישובי שטחים. 724.....
- ג. אימות אינטגרלים על-ידי גזירה. 732.....
- ד. אינטגרלים של פונקציות טריגונומטריות. 736.....

המכילים גם ביטויים מעריכיים ו/או לוגריתמיים. 736.....

פרק 31: נוסחאות בחשבון אינטגרלי. 738.....

739 - 814

חלק ו': מבחני חזרה ונספחים

- **35 מבחני חזרה. 739 - 808.....**
- **מיון השאלות לפי נושאים (ממבחני החזרה). 809 - 810.....**
- **נוסחאון במתמטיקה 4-5 יחידות לימוד. 811 - 814.....**