פרק 1: תרגילי חזרה בפתרון משוואות ומערכות משוואות ממעלה ראשונה ושנייה

תרגילים לעבודה עצמית

משוואות ממעלה ראשונה בנעלם אחד

פתור את המשוואות שבתרגילים **(1)** – **(8)**.

(1) $9(12+x)-4(x-1)=5(23-2x)+9x-9$

(2) $19-2(-2x-28)=5(-x+13)-44$

(3) $x(x+4)-2=4(x-8)+x^2+x$

(4) $x^2=(x+4)(x-4)-2x$

(5) $6+(x+3)(x-3)=2x+x^2$

(6) $(x-70)(x-70)=x(x-40)$

(7) $(2x-1)(2x-1)=(4x-8)(x-2)+33$

(8) $(x+2)(x+2)-(x-3)(x-3)=30$

פתור את המשוואות שבתרגילים **(9)** – **(18)**.

(9) $\frac{4-x}{3}+\frac{2x-5}{18}=\frac{4-x}{4}$

(10) $\frac{3x-5}{2}-\frac{18-14x}{8}=\frac{4x+3}{3}$

(11) $\frac{-x-5}{5}-x+\frac{5x-4}{3}=0$

(12) $\frac{16x-3}{10}=9x-\frac{10x+7}{3}$

(13) $4-\frac{6x+3}{4}=x-\frac{5x+8}{6}$

(14) $3x-\frac{2x+9}{18}=3+\frac{22x+15}{12}$

(15) $\frac{x+10}{3}-\frac{8-x}{2}-\frac{x-2}{6}=\frac{4x+2}{10}$

(16) $\frac{7x+4}{6}-\frac{3x-2}{4}=\frac{2x-1}{3}-\frac{2x+2}{4}$

(17) $\frac{5x-1}{3}-\frac{x-1}{6}-\frac{2x+3}{4}=2-\frac{1-2x}{2}$

(18) $\frac{2x-1}{5}-\frac{3x-1}{15}-\frac{2x-3}{10}=\frac{1}{6}$

מערכת משוואות ממעלה ראשונה בשני נעלמים

פתור את המשוואות שבתרגילים **(19)** – **(30)**.

(19) $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 3 - \frac{5y - 3x}{3} = \frac{7y + 13}{6} \end{cases}$

(20) $\begin{cases} -x + 6y = 12 \\ \frac{4y}{3} = \frac{4y - 5x}{3} - 5 \end{cases}$

(21) $\begin{cases} 3x + 2y = 10 \\ \frac{x - 7}{2} + 4y = \frac{12y - 2x}{3} \end{cases}$

(22) $\begin{cases} 3x = 4y - 15 \\ \frac{5x + 3y}{4} = \frac{x + 2y}{5} \end{cases}$

(23) $\begin{cases} 6x - 19 = 4y \\ \frac{2x + y}{4} - \frac{4x + 3y}{7} = 0 \end{cases}$

(24) $\begin{cases} 4x + 11 = 6y \\ \frac{3x + 5y}{2} = \frac{7y - 3x}{4} \end{cases}$

(25) $\begin{cases} 7x - 5y - 8 = 0 \\ 4x - 9 = \frac{5(3y - x)}{4} \end{cases}$

(26) $\begin{cases} 2x + 5y = 3 \\ \frac{5x + 2y}{3} = \frac{5 - 7y}{2} \end{cases}$

(27) $\begin{cases} \frac{5y - 2}{9} - \frac{4x - 11}{3} = 5 \\ \frac{8x + 1}{5} - 3 = -\frac{2y + 6}{7} \end{cases}$

(28) $\begin{cases} 1 - \frac{8x - 2}{7} = \frac{2 - y}{3} \\ 3 - \frac{3x + 4}{10} = \frac{3y - 5}{5} \end{cases}$

(29) $\begin{cases} \frac{6y + 3}{8} - 6 = \frac{8x + 1}{5} \\ \frac{4y - 5}{9} - 5 = \frac{10x - 4}{6} \end{cases}$

(30) $\begin{cases} \frac{0.5x - 4}{3} + 2 = \frac{y - 2.5}{3} \\ \frac{2y + 5}{10} + 1 = \frac{2 - 7x}{15} \end{cases}$

משוואות ממעלה שנייה בנעלם אחד

פתור את המשוואות הריבועיות החסרות שבתרגילים **(31)** – **(38)**.

(31) $x^2 - 36 = 0$

(32) $4x^2 = 9$

(33) $81 - x^2 = 0$

(34) $8 - \frac{1}{2}x^2 = 0$

(35) $9 + x^2 = 0$

(36) $x^2 = x$

(37) $6x = 2x^2$

(38) $-9x + 0.6x^2 = 0$

פתור את המשוואות הריבועיות שבתרגילים **(39)** – **(43)**.

(39) $(2x-10)(x+5)=x^2+10x-75$

(40) $(3x-5)(x-8)=-x^2-x-9$

(41) $(3-2x)(x+1)=3(2x-3)$

(42) $(9-2x)(6-x)=2(x-2)-3x$

(43) $(4x-7)(1-2x)=(1-3x)(2x-1)+6x$

מערכת משוואות ממעלה שנייה בשני נעלמים

פתור את המשוואות שבתרגילים **(44)** – **(53)**.

(44) $\left.\begin{array}{l} 2y-3x=3 \\ x\cdot y=3 \end{array}\right\}$

(45) $\left.\begin{array}{l} 5x+2y=3 \\ x\cdot y+1=0 \end{array}\right\}$

(46) $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=25 \\ x+7y=25 \end{array}\right\}$

(47) $\left.\begin{array}{l} 5-y^2=x^2 \\ 3x+y+1=0 \end{array}\right\}$

(48) $\left.\begin{array}{l} y^2=13-x^2 \\ 3x+2y=13 \end{array}\right\}$

(49) $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=20 \\ 2x+3y=25 \end{array}\right\}$

(50) $\left.\begin{array}{l} 5-x^2=y^2 \\ x\cdot y=2 \end{array}\right\}$

(51) $\left.\begin{array}{l} 20=x^2+y^2 \\ x\cdot y+8=0 \end{array}\right\}$

(52) $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=2 \\ 2y^2-x=1 \end{array}\right\}$

(53) $\left.\begin{array}{l} 2x^2+y^2=11 \\ x^2+5y=16 \end{array}\right\}$

פתור את המשוואות שבתרגילים **(54)** – **(61)**.

(54) $\left.\begin{array}{l} y=2x^2-9x+5 \\ 2x-y=7 \end{array}\right\}$

(55) $\left.\begin{array}{l} y=-x^2+5x-2 \\ 2y-7x=-6 \end{array}\right\}$

(56) $\left.\begin{array}{l} y=x^2-4x+10 \\ y=-x^2+2x+6 \end{array}\right\}$

(57) $\left.\begin{array}{l} y=2x^2-4x-1 \\ y=-x^2+2x+8 \end{array}\right\}$

(58) $\left.\begin{array}{l}(x-3)^2+(y+3)^2=5\\ x-2y=9\end{array}\right\}$

(59) $\left.\begin{array}{l}(x+4)^2+(y-4)^2=5\\ x+y=1\end{array}\right\}$

(60) $\left.\begin{array}{l}(x-5)^2+(y+1)^2=18\\ x-y=6\end{array}\right\}$

(61) $\left.\begin{array}{l}(x-3)^2+(y+4)^2=9\\ 2x+y=12\end{array}\right\}$

פתור את המשוואות שבתרגילים **(62)** – **(69)**.

(62) $\left.\begin{array}{l}(x+3)^2+y^2=25\\ x^2+y^2=10\end{array}\right\}$

(63) $\left.\begin{array}{l}x^2+(y+2)^2=29\\ x^2+y^2=13\end{array}\right\}$

(64) $\left.\begin{array}{l}(x+3)^2+(y-1)^2=34\\ x^2+y^2=20\end{array}\right\}$

(65) $\left.\begin{array}{l}(x+6)^2+(y-9)^2=52\\ x^2+y^2=13\end{array}\right\}$

(66) $\left.\begin{array}{l}(x+1)^2+y^2=20\\ y=x^2+2x+1\end{array}\right\}$

(67) $\left.\begin{array}{l}x^2+y^2=25\\ y=-x^2+5\end{array}\right\}$

(68) $\left.\begin{array}{l}(x-2)^2+y^2=2\\ y=x^2-4x+4\end{array}\right\}$

(69) $\left.\begin{array}{l}x^2+y^2=29\\ y=x^2+1\end{array}\right\}$

תשובות סופיות

(1) $x=-1$ **(2)** $x=-6$ **(3)** $x=30$ **(4)** $x=-8$

(5) $x=-1\frac{1}{2}$ **(6)** $x=49$ **(7)** $x=4$ **(8)** $x=3\frac{1}{2}$

(9) $x=-2$ **(10)** $x=3$ **(11)** $x=5$ **(12)** $x=\frac{1}{2}$

(13) $x=2\frac{3}{4}$ **(14)** $x=4\frac{1}{2}$ **(15)** $x=2$ **(16)** $x=-8$

(17) ϕ **(18)** כל x **(19)** $(2,1)$ **(20)** $(-3,1.5)$

(21) $(3,0.5)$ **(22)** $(-1,3)$ **(23)** $(2.5,-1)$ **(24)** $(-0.5,1.5)$

(25) ϕ **(26)** אינסוף פתרונות **(27)** $(0.5,4)$

(28) $(2,5)$ **(29)** $(-2,3.5)$ **(30)** $(-4,2.5)$ **(31)** $x_{1,2}=\pm 6$

(32) $x_{1,2} = \pm\frac{3}{2}$ **(33)** $x_{1,2} = \pm 9$ **(34)** $x_{1,2} = \pm 4$ **(35)** ϕ

(36) $x_1 = 0 \ , \ x_2 = 1$ **(37)** $x_1 = 0 \ , \ x_2 = 3$

(38) $x_1 = 0 \ , \ x_2 = 15$ **(39)** $x = 5$

(40) $x = 3\frac{1}{2}$ **(41)** $x_1 = 1\frac{1}{2} \ , \ x_2 = -4$

(42) ϕ **(43)** $x_1 = 1\frac{1}{2} \ , \ x_2 = 2$

(44) $(1,3) \ , \ (-2,-1.5)$ **(45)** $(1,-1) \ , \ (-0.4,2.5)$

(46) $(-3,4) \ , \ (4,3)$ **(47)** $(-1,2) \ , \ (0.4,-2.2)$

(48) $(3,2)$ **(49)** ϕ

(50) $(-1,-2) \ , \ (1,2) \ , \ (-2,-1) \ , \ (2,1)$

(51) $(4,-2) \ , \ (-4,2) \ , \ (2,-4) \ , \ (-2,4)$

(52) $(1,1) \ , \ (1,-1)$ **(53)** $(1,3) \ , \ (-1,3)$

(54) $(1.5,-4) \ , \ (4,1)$ **(55)** $(-0.5,-4.75) \ , \ (2,4)$

(56) $(1,7) \ , \ (2,6)$ **(57)** $(3,5) \ , \ (-1,5)$

(58) $(1,-4) \ , \ (5,-2)$ **(59)** $(-5,6) \ , \ (-2,3)$

(60) $(2,-4) \ , \ (8,2)$ **(61)** ϕ

(62) $(1,3) \ , \ (1,-3)$ **(63)** $(2,3) \ , \ (-2,3)$

(64) $(-0.8,-4.4) \ , \ (2,4)$ **(65)** $(-2,3)$

(66) $(1,4) \ , \ (-3,4)$ **(67)** $(-3,-4) \ , \ (3,-4) \ , \ (0,5)$

(68) $(1,1) \ , \ (3,1)$ **(69)** $(2,5) \ , \ (-2,5)$

פרק 2: חוקי החזקות במעריכים טבעיים ובמעריכים שלמים

הגדרה: **a בחזקת n :** $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ פעמים}}$ (n – מספר טבעי).

a נקרא **בסיס החזקה** ו- **n** נקרא **מעריך החזקה**.

לכל $a \neq 0$ מתקיים: $a^0 = 1$ ו- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (0^0 **אינו מוגדר**).

חוקי החזקות:	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $(a \neq 0)$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$(a \cdot b)^n = a^n b^n$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $(b \neq 0)$

<u>*דוגמאות חישוב עם חזקות*</u>

(1) $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = +16$

(2) $-2^4 = -(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = -16$

(3) $(-1)^{11} = \underbrace{(-1) \cdot (-1) \cdot \ldots \cdot (-1)}_{11 \text{ פעמים}} = -1$

(4) $(-1)^{22} = \underbrace{(-1) \cdot (-1) \cdot \ldots \cdot (-1)}_{22 \text{ פעמים}} = +1$

(5) $(-2)^3 \cdot (-1)^5 = (-8) \cdot (-1) = +8$

(6) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

(7) $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$

המשך בעמוד הבא >>>

(8) $$\frac{25^{30}\cdot 125^{10}}{5^{88}}=\frac{(5^2)^{30}\cdot(5^3)^{10}}{5^{88}}=\frac{5^{60}\cdot 5^{30}}{5^{88}}=\frac{5^{90}}{5^{88}}=5^2=25$$

(9) $$\frac{9^{40}\cdot 27^4}{81^{23}}=\frac{(3^2)^{40}\cdot(3^3)^4}{(3^4)^{23}}=\frac{3^{80}\cdot 3^{12}}{3^{92}}=\frac{3^{92}}{3^{92}}=3^0=1$$

(10) $$\frac{(a^5b^2)^3\cdot(a^8b^6)^2}{(a^3)^9\cdot(ab^3)^5}=\frac{a^{15}\cdot b^6\cdot a^{16}\cdot b^{12}}{a^{27}\cdot a^5\cdot b^{15}}=\frac{a^{31}b^{18}}{a^{32}b^{15}}=\frac{b^3}{a}$$

(11) $$\left(\frac{a^2}{b^5}\right)^3\cdot\left(\frac{b^4}{a^2}\right)^4=\frac{a^6}{b^{15}}\cdot\frac{b^{16}}{a^8}=\frac{b}{a^2}$$

<u>דוגמאות פתורות נוספות</u>

(12) נתון כי: $6^y=7$, $36^x=50$.

קבע ללא שימוש במחשבון אם מתקיים: $x>y$ **או** $x<y$ **או** $x=y$.

<u>פתרון:</u>

$$6^y=7 \quad\Rightarrow\quad (6^y)^2=(7)^2 \quad\Rightarrow\quad 6^{2y}=49 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad (6^2)^y=49 \quad\Rightarrow\quad (36)^y=49$$

לפי הנתון, מתקיים: $(36)^x=50$.

תשובה: *מכיוון ש-* $50>49$, *מתקיים:* $x>y$.

באופן כללי:

- **אם בסיס החזקה, a גדול מ- 1 :** $\mathbf{a>1}$

אזי: $x>y \Leftrightarrow \mathbf{a^x>a^y}$. למשל: $3^5>3^2$ או $3^{-1}>3^{-2}$

- **אם בסיס החזקה, a קטן מ- 1 וגדול מ- 0 :** $\mathbf{0<a<1}$

אזי: $x>y \Leftrightarrow \mathbf{a^x<a^y}$. למשל: $\left(\frac{1}{2}\right)^5<\left(\frac{1}{2}\right)^2$ או $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}<\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

(13) נתון כי: $A=5^{240}$, $B=3^{360}$.

קבע ללא שימוש במחשבון אם מתקיים: $A>B$ **או** $A<B$ **או** $A=B$.

<u>פתרון:</u>

$$A=5^{240}=(5^2)^{120}=25^{120} \quad , \quad B=3^{360}=(3^3)^{120}=27^{120}$$

תשובה: *מכיוון ש-* $27>25$, *מתקיים:* $B>A$.

באופן כללי: נתונים מספרים a ו- b חיוביים ושונים מ- 1 , אזי:

- **אם** $m > 0$: $a^m > b^m \Leftrightarrow a > b$

  למשל: $5^3 > 2^3$ או $\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{3}\right)^2$

- **אם** $m < 0$: $a^m < b^m \Leftrightarrow a > b$

  למשל: $5^{-3} < 2^{-3}$ או $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

תרגילים לעבודה עצמית

חשב את ערכי הביטויים שבתרגילים **(1)** – **(5)**. פתור ללא שימוש במחשבון.

(1) (א) $(-2)^6 =$ (ב) $-2^6 =$ (ג) $(-1)^8 =$

(ד) $-1^8 =$ (ה) $2^{-3} =$ (ו) $(-2)^{-2} =$

(ז) $-5^0 =$ (ח) $(-0.5)^0 =$ (ט) $(0.5)^{-3} =$

(י) $-\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} =$ (יא) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3} =$ (יב) $(0.25)^{-3} =$

(יג) $(0.1)^{-2} =$ (יד) $2^{-2} + 2^{-1} =$ (טו) $10^{-2} + 10^{-1} =$

(2) (א) $(-1)^3 \cdot (-2)^5 =$ (ב) $(-5)^2 \cdot 2^3 \cdot 10^{-1} =$

(ג) $-10^3 \cdot 5^{-2} \cdot 2^{-2} =$ (ד) $10^{-4} \cdot 5^3 \cdot 2^3 =$

(ה) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} \cdot 2^{-1} =$ (ו) $10^{-2} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{-4} =$

(ז) $(0.5)^{-2} \cdot (-5)^2 \cdot 10^{-2} =$ (ח) $10^{-5} \cdot (-10)^5 =$

(3) (א) $(-2)^5 - (-2)^3 =$ (ב) $10^3 - (0.1)^{-4} =$

(ג) $(-2)^6 - (-1)^5 \cdot (-4)^3 =$ (ד) $(-2)^3 - (-2)^5 - (-5)^2 =$

(ה) $10^{-1} : 10^{-3} =$ (ו) $10^{-5} : 10^{-8} =$

(ז) $2^{-5} : 2^{-4} =$ (ח) $(-2)^{-4} : (-2)^{-5} =$

(4) (א) $\frac{16^{26}}{8^{34}} =$ (ב) $\frac{9^{50}}{27^{33}} =$ (ג) $\frac{32^{20}}{64^{16}} =$ (ד) $\frac{10^9}{2^8 \cdot 5^8} =$

(ה) $\frac{8^{-7}}{4^{-11}} =$ (ו) $\frac{27^{-6}}{9^{-10}} =$ (ז) $\frac{4^{-23}}{8^{-15}} =$ (ח) $\frac{9^{-15}}{27^{-10}} =$

(5) (א) $\frac{6^{30}\cdot 4^{5}}{12^{21}\cdot 27^{3}}=$ (ב) $\frac{12^{25}\cdot 18^{31}}{81^{22}\cdot 16^{20}}=$

(ג) $\frac{9^{50}\cdot 125^{30}}{15^{60}\cdot 45^{20}\cdot 25^{5}}=$ (ד) $\frac{32^{7}\cdot 24^{10}\cdot 9^{16}}{18^{20}\cdot 8^{15}}=$

(ה) $\left(\frac{2}{3}\right)^{8}\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^{3}=$ (ו) $\left(\frac{4}{5}\right)^{6}\cdot\left(\frac{25}{8}\right)^{3}=$

(ז) $\left(\frac{4}{3}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{-2}=$ (ח) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}=$

(6) פשט את הביטויים הבאים:

(א) $\frac{a^{9}\cdot a^{10}\cdot (a^{3})^{10}}{(a^{10})^{4}\cdot (a^{2})^{3}}=$ (ב) $\frac{(a^{5})^{3}\cdot (a^{8})^{5}\cdot (a^{2})^{2}}{(a^{7})^{3}\cdot (a^{4})^{8}\cdot (a^{3})^{2}}=$

(ג) $\frac{(a^{3}b^{2})^{6}\cdot (ab^{4})^{3}}{(a^{5}b^{6})^{4}}=$ (ד) $\frac{(a^{7}b^{2})^{3}\cdot (a^{5}b^{8})^{2}}{(a^{4}b^{3})^{5}\cdot (a^{5}b^{4})^{2}}=$

(ה) $\frac{(a^{5}b^{2})^{3}\cdot (a^{7}b^{3})^{5}}{(a^{2})^{20}\cdot (ab^{2})^{10}}=$ (ו) $\frac{(a^{-2})^{5}\cdot (b^{3})^{-3}}{(a^{-3})^{4}\cdot (b^{-2})^{4}}=$

(ז) $\left(\frac{a^{2}}{b^{3}}\right)^{5}\cdot\left(\frac{b^{4}}{a^{3}}\right)^{4}=$ (ח) $\left(\frac{a^{3}}{b^{7}}\right)^{3}\cdot\left(\frac{b^{5}}{a^{2}}\right)^{4}=$

(ט) $\left(\frac{a^{4}}{b^{3}}\right)^{n}\cdot\left(\frac{b^{4}}{a^{3}}\right)^{n}=$ (י) $\left(\frac{a^{3}}{b^{4}}\right)^{2n}\cdot\left(\frac{b^{7}}{a^{5}}\right)^{n}=$

(יא) $\frac{(a^{2}b^{3})^{n}\cdot (a^{4}b^{3})^{n+1}}{a^{4}\cdot (a^{3}b^{4})^{2n}}=$ (יב) $\frac{(a^{2}b)^{n}\cdot (ab^{2})^{-n}}{(a^{3}b)^{n}\cdot (ab^{3})^{-n}}=$

(7) רשום ב- $\square$ את הסימן $>$, $<$ או $=$, כך שיתקבל **פסוק אמת**.

(א) $4^{200}\ \square\ 8^{133}$ (ב) $4^{300}\ \square\ 8^{200}$

(ג) $4^{412}\ \square\ 8^{275}$ (ד) $27^{100}\ \square\ 81^{80}$

(ה) $27^{150}\ \square\ 81^{110}$ (ו) $\left(\frac{1}{4}\right)^{35}\ \square\ \left(\frac{1}{8}\right)^{25}$

(ז) $\left(\frac{1}{9}\right)^{120}\ \square\ \left(\frac{1}{27}\right)^{80}$ (ח) $\left(\frac{1}{16}\right)^{70}\ \square\ \left(\frac{1}{32}\right)^{60}$

(ט) $\left(\frac{1}{10}\right)^{100}\ \square\ \left(\frac{1}{100}\right)^{49}$ (י) $\left(\frac{1}{10}\right)^{101}\ \square\ \left(\frac{1}{100}\right)^{50}$

(8) רשום ב- ☐ את הסימן $>$, $<$ או $=$, כך שיתקבל **פסוק אמת**.

(א) (i) 16^{124} ☐ 32^{99} (ב) (i) $7\cdot 8^{149}$ ☐ 8^{150}

(ii) 16^{125} ☐ 32^{100} (ii) $9\cdot 8^{149}$ ☐ 8^{150}

(iii) 16^{126} ☐ 32^{101} (iii) $8\cdot 8^{149}$ ☐ 8^{150}

(9) רשום ב- ☐ את הסימן $>$, $<$ או $=$, כך שיתקבל **פסוק אמת**.

(א) 9^{50} ☐ 3^{99} (ב) 4^{100} ☐ 16^{50}

(ג) 9^{-10} ☐ 3^{-20} (ד) 16^{-10} ☐ 2^{-41}

(ה) $(-9)^{11}$ ☐ $(-3)^{21}$ (ו) $(-16)^{14}$ ☐ $(-8)^{20}$

(ז) $(-25)^{35}$ ☐ $(-5)^{70}$ (ח) $(-32)^{15}$ ☐ $(-8)^{25}$

(10) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונים ביטויים ל- A ול- B , ועליך לקבוע אם מתקיים: $A=B$ או $A>B$ או $A<B$. נמק את תשובתך.

(א) $A=2^{450}$ $B=3^{300}$ (ב) $A=8^{200}$ $B=4^{300}$

(ג) $A=10^{140}$ $B=5^{210}$ (ד) $A=9^{800}$ $B=80^{400}$

(ה) $A=64^{100}$ $B=27^{200}$ (ו) $A=81^{150}$ $B=4^{450}$

(ז) $A=5^{300}$ $B=2^{700}$ (ח) $A=2^{800}$ $B=3^{500}$

(ט) $A=6^{30}$ $B=15^{20}$ (י) $A=2^{1,000}$ $B=10^{300}$

(יא) $A=(0.5)^{20}$ $B=(0.7)^{40}$

(יב) $A=(0.8)^{400}$ $B=(0.6)^{200}$

(יג) $A=(24\cdot 54)^{300}$ $B=216^{400}$

(יד) $A=12^{100}\cdot 18^{200}$ $B=36^{200}\cdot 6^{50}$

(11) בכל אחד מהסעיפים הבאים x ו- y הם מעריכי חזקות. קבע ללא שימוש

במחשבון אם מתקיים: $x>y$ או $x<y$ או $x=y$. נמק את תשובתך.

(א) $3^x=8$ $9^y=80$

(ב) $5^x=10$ $25^y=90$

(ג) $4^x=3$ $8^y=5$

(ד) $9^x=7$ $27^y=18$

(ה) $125^x=22$ $25^y=8$

(ו) $32^x=5$ $128^y=9$

(ז) $9^{x+2}=324$ $27^{y-1}=\frac{5}{9}$

(ח) $8^{x-2}=\frac{17}{32}$ $16^{y+1}=1{,}184$

תשובות סופיות

(1)	(א) 64	(ב) -64	(ג) 1	(ד) -1
	(ה) $\frac{1}{8}$	(ו) $\frac{1}{4}$	(ז) -1	(ח) 1
	(ט) 8	(י) -4	(יא) -27	(יב) 64
	(יג) 100	(יד) $\frac{3}{4}$	(טו) 0.11 או $\frac{11}{100}$	
(2)	(א) 32	(ב) 20	(ג) -10	(ד) $\frac{1}{10}$
	(ה) 8	(ו) 100	(ז) 1	(ח) -1
(3)	(א) -24	(ב) -9000	(ג) 0	(ד) -1
	(ה) 100	(ו) 1000	(ז) $\frac{1}{2}$	(ח) -2
(4)	(א) 4	(ב) 3	(ג) 16	(ד) 10
	(ה) 2	(ו) 9	(ז) $\frac{1}{2}$	(ח) 1
(5)	(א) $\frac{1}{4}$	(ב) $\frac{2}{3}$	(ג) 1	(ד) 9
	(ה) $\frac{4}{9}$	(ו) 8	(ז) 27	(ח) 40
(6)	(א) a^3	(ב) 1	(ג) a	(ד) $\frac{a}{b}$

(ה) b (ו) $\frac{a^2}{b}$ (ז) $\frac{b}{a^2}$ (ח) $\frac{a}{b}$

(ט) $(ab)^n$ (י) $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ (יא) b^{3-2n} (יב) $\left(\frac{b}{a}\right)^n$

(7) (א) $>$ (ב) $=$ (ג) $<$ (ד) $<$

(ה) $>$ (ו) $>$ (ז) $=$ (ח) $>$

(ט) $<$ (י) $<$

(8) (א) (i) $<$ (ii) $=$ (iii) $>$

(ב) (i) $>$ (ii) $<$ (iii) $=$

(9) (א) $<$ (ב) $=$ (ג) $=$ (ד) $<$

(ה) $>$ (ו) $>$ (ז) $>$ (ח) $=$

(10) (א) $A<B$ (ב) $A=B$ (ג) $A<B$ (ד) $A>B$

(ה) $A<B$ (ו) $A>B$ (ז) $A<B$ (ח) $A>B$

(ט) $A<B$ (י) $A>B$ (יא) $A>B$ (יב) $A>B$

(יג) $A=B$ (יד) $A>B$

(11) (א) $x<y$ (ב) $x>y$ (ג) $x>y$ (ד) $x>y$

(ה) $x<y$ (ו) $x>y$ (ז) $x<y$ (ח) $x>y$

פרק 4: השורש הריבועי, שורשים מסדר גבוה

א. השורש הריבועי, מעריך חזקה השווה לחצי

בפעולת השורש הריבועי (הנקרא גם השורש השני) נתקלנו פעמים רבות בעבר, כאשר פתרנו משוואות ריבועיות. נזכיר רק שתחום ההצבה של התבנית $\sqrt{\mathbf{a}}$ הוא כל המספרים האי-שליליים $a \ge 0$, וכן ש- $\sqrt{a}$ הוא מספר **אי-שלילי**, שריבועו הוא a.
כלומר: $\sqrt{a} \ge 0$ ו- $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$. זה המקום לחזור ולהדגיש, שערך הביטוי $\sqrt{9}$ (למשל) הוא **המספר החיובי**: 3, בעוד שבפתרון המשוואה: $x^2 = 9$ (למשל) מקבלים שני פתרונות: $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$.

לדוגמא, השוויון: $\sqrt{a^8} = a^4$ נכון לכל a ממשי,
אבל השוויון: $\sqrt{a^2} = a$ נכון רק עבור כל a אי-שלילי (עבור כל $a \ge 0$)
ואילו השוויון: $\sqrt{a^2 - 10a + 25} = a - 5$ נכון עבור כל $a \ge 5$.

השוויון $\sqrt{a^2} = |a|$ מתקיים לכל a ממשי: $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} +a & a \ge 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$

לדוגמא, אם $\mathbf{a = -3}$ אזי: $\sqrt{(\mathbf{-3})^2} = \sqrt{9} = 3 = -(\mathbf{-3})$.
(בהמשך לימודי האלגברה נרחיב את הדיון ואת ההסברים בנושא **הערך המוחלט**.)

כללים לחישוב שורשים ריבועיים:

$\sqrt{\mathbf{a^n}} = \left(\sqrt{\mathbf{a}}\right)^{\mathbf{n}}$	$(\mathbf{a \ge 0})$
$\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{a^n}}} = \frac{\mathbf{1}}{\left(\sqrt{\mathbf{a}}\right)^{\mathbf{n}}} = \left(\sqrt{\mathbf{a}}\right)^{\mathbf{-n}} = \sqrt{\mathbf{a^{-n}}}$	$(\mathbf{a > 0})$
$\sqrt{\mathbf{ab}} = \sqrt{\mathbf{a}} \cdot \sqrt{\mathbf{b}}$	$(\mathbf{a \ge 0}\ ,\ \mathbf{b \ge 0})$
$\sqrt{\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}} = \frac{\sqrt{\mathbf{a}}}{\sqrt{\mathbf{b}}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}}}$	$(\mathbf{a > 0}\ ,\ \mathbf{b > 0})$

דוגמאות פתורות

נביא מספר דוגמאות לפישוט וחישוב ביטויים המכילים שורשים.

(1) הוצאת גורם **מחוץ** לשורש: $\sqrt{640} = \sqrt{64 \cdot 10} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{10} = 8\sqrt{10}$

(2) הכנסת גורם **לתוך** השורש: $3\sqrt{5} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{45}$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(3) פישוט ביטוי אלגברי ($a > 0$):
$$\frac{\sqrt{a}-a}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}\,(1-\sqrt{a}\,)}{\sqrt{a}} = 1-\sqrt{a}$$

(4) פישוט אלגברי ($a \ge 0\ ,\ a \ne 16$):
$$\frac{a-16}{\sqrt{a}-4} = \frac{(\sqrt{a}+4)(\sqrt{a}-4)}{\sqrt{a}-4} = \sqrt{a}+4$$

(5) ביטול שורש במכנה:
$$\frac{2}{\sqrt{7}+1} = \frac{2\,(\sqrt{7}-1)}{(\sqrt{7}+1)\,(\sqrt{7}-1)} = \frac{2\sqrt{7}-2}{7-1} = \frac{2\sqrt{7}-2}{6} = \frac{\sqrt{7}-1}{3}$$

(6) ביטול שורש במכנה ($a \ge 0\ ,\ a \ne 9$):
$$\frac{a}{\sqrt{a}-3} = \frac{a(\sqrt{a}+3)}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)} = \frac{a\sqrt{a}+3a}{a-9}$$

* * *

את השורש הריבועי ניתן לתאר גם באמצעות חזקות. ככלל, כאשר חזרנו על חוקי החזקות אמנם הגבלנו את הדיון לחזקות עם מעריך שלם (חיובי, שלילי או אפס) אך למעשה חוקי החזקות כפי שנלמדו נכונים לכל מעריך ממשי (את הדיון בנושא זה נרחיב במסגרת לימודי שאלון **035807**). יחד עם זאת, את השורש הריבועי נוח מאד לתאר באמצעות חזקות (זאת נראה במיוחד במסגרת לימודי החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי בהמשך ספר זה ובכרך ב' של הספר).

ננסה להבין את צורת הרישום באמצעות מספר דוגמאות:

- $\sqrt{81} = \sqrt{9^2} = 9^1 = 9^{\frac{1}{2}\cdot 2}$
- $\sqrt{81} = \sqrt{3^4} = 3^2 = 3^{\frac{1}{2}\cdot 4}$
- $\sqrt{8^{2n}} = \sqrt{8^n \cdot 8^n} = 8^n = 8^{\frac{1}{2}\cdot 2n}$

ניתן לראות שבהוצאת שורש ריבועי מעריך החזקה קטן פי 2.

רישום שורשים ריבועיים באמצעות חזקות של חצי:

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} = a^{0.5} \qquad (a \ge 0)$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{a^{0.5}} = a^{-0.5} = a^{-\frac{1}{2}} \qquad (a > 0)$$

$$\sqrt{a^n} = a^{\frac{n}{2}} = a^{0.5\,n} \qquad (a \ge 0)$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^n}} = \frac{1}{a^{0.5n}} = a^{-0.5\,n} = a^{-\frac{n}{2}} \qquad (a > 0)$$

<u>דוגמאות פתורות – המשך</u>

(7) כאמור, חוקי החזקות שניסחנו עבור מעריכים שלמים נכונים גם עבור מעריכים כלשהם ובפרט עבור מעריכים השווים לחצי. כך למשל מתקיים:

- $\sqrt{x^7} = x^{0.5 \cdot 7} = x^{3.5} = x^3 \cdot x^{0.5} = x^3\sqrt{x}$
- $\frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{0.5 \cdot 3}} = \frac{1}{x^{1.5}} = x^{-1.5} = x^{-1} \cdot x^{-0.5} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x\sqrt{x}}$

(8) פשט את הביטוי: $x\sqrt{x^3} + \sqrt{4x^5}$

<u>פתרון:</u>

$$x\sqrt{x^3} + \sqrt{4x^5} = x\sqrt{x^3} + \sqrt{4} \cdot \sqrt{x^5} = x \cdot x^{0.5 \cdot 3} + 2 \cdot x^{0.5 \cdot 5} =$$
$$= x^1 \cdot x^{1.5} + 2x^{2.5} = x^{1+1.5} + 2x^{2.5} = x^{2.5} + 2x^{2.5} =$$
$$= 3x^{2.5} = 3x^2 \cdot x^{0.5} = 3x^2\sqrt{x} = 3\sqrt{x^5}$$

הערה: שתי צורות הרישום השקולות האחרונות: $3x^2\sqrt{x} = 3\sqrt{x^5}$ נחשבות צורות מפושטות ונשתמש בכל אחת מהן לפי הצורך.

<u>תרגילים לעבודה עצמית</u>

(1) ענה על השאלות שבסעיפים הבאים.

(א) האם השוויון: $\sqrt{a^4} = a^2$ נכון רק עבור $a \ge 0$ או נכון עבור כל a ממשי? נמק!

(ב) האם השוויון: $\sqrt{a^2 - 4a + 4} = a - 2$ נכון רק עבור $a \ge 2$ או נכון לכל a ממשי? נמק!

(ג) עבור אילו ערכים של a מתקיים: $\sqrt{9 - 6a + a^2} = a - 3$?

(ד) עבור אילו ערכים של a מתקיים: $\sqrt{9 - 6a + a^2} = 3 - a$?

(ה) עבור אילו ערכים של a מתקיים: $\sqrt{a^4 - 2a^2 + 1} = a^2 - 1$?

(ו) עבור אילו ערכים של a מתקיים: $\sqrt{\frac{a^2 - 8a + 16}{a^2 + 8a + 16}} = \frac{4 - a}{4 + a}$?

(2) בכל סעיף, קבע האם הטענה: "*נכונה*" *__או__* "*לא נכונה*". נמק את קביעתך.

(א) השוויון: $\sqrt{a^2} = -a$ מתקיים רק עבור $a \le 0$.

(ב) השוויון: $\sqrt{a^2 - b^2} = a - b$ מתקיים עבור כל $a > b$.

(ג) השוויון: $\sqrt{a^2 - 10a + 25} = 5 - a$ מתקיים עבור כל $a \le 5$.

(ד) השוויון: $\sqrt{a^4 + 4a^2 + 4} = a^2 + 2$ מתקיים רק עבור $a \ge 0$.

(3) בסעיפים הבאים הוֹצֵא גורם מחוץ לשורש.

(א) $\sqrt{8}$ (ב) $\sqrt{20}$ (ג) $\sqrt{50}$ (ד) $\sqrt{27}$

(ה) $\sqrt{125}$ (ו) $\sqrt{270}$ (ז) $\sqrt{250}$ (ח) $\sqrt{162}$

(4) בסעיפים הבאים הוֹצֵא גורם מחוץ לשורש. שים לב לתחום ההגדרה.

(א) $\sqrt{a^5}$, $a \ge 0$ (ב) $\sqrt{a^3}$, $a \ge 0$

(ג) $\sqrt{a^2 b^3}$, $a , b \ge 0$ (ד) $\sqrt{a^6 b^4}$, $a \le 0$

(ה) $\sqrt{a^6 b^8 c^9}$, $a , c \ge 0$ (ו) $\sqrt{a^3 b^5 c^{14}}$, $a , b , c \le 0$

(ז) $\sqrt{a^{10} b^{12} c^5}$, $a , c \ge 0$ (ח) $\sqrt{a^4 b^7 c^{11}}$, $b , c \le 0$

(5) בתרגילים הבאים הכנס לתוך השורש את הגורמים הנמצאים מחוץ לשורש.

(א) $2\sqrt{3}$ (ב) $\frac{1}{2}\sqrt{8}$ (ג) $\frac{2}{3}\sqrt{27}$ (ד) $4\sqrt{2}$

(ה) $6\sqrt{5}$ (ו) $1.5\sqrt{12}$ (ז) $\frac{5}{4}\sqrt{6.4}$ (ח) $\frac{1}{6}\sqrt{72}$

(6) בתרגילים הבאים הכנס לתוך השורש את הגורמים הנמצאים מחוץ לשורש.
שים לב לתחום ההגדרה.

(א) $a\sqrt{a^5}$, $a \ge 0$ (ב) $a^2 b\sqrt{ab}$, $a , b \ge 0$

(ג) $\frac{a+b}{\sqrt{a^2 - b^2}}$, $a > b \ge 0$ (ד) $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a-b}$, $a > b \ge 0$

(7) פשט ומצא ללא שימוש במחשבון את ערכי הביטויים שבסעיפים הבאים.

(א) $\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}$ (ב) $\sqrt{27}\cdot\sqrt{12}$

(ג) $\sqrt{8}\cdot\sqrt{18}$ (ד) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{75}$

(ה) $\frac{\sqrt{32}\cdot\sqrt{54}}{\sqrt{12}}$ (ו) $\frac{\sqrt{24}\cdot\sqrt{18}}{\sqrt{12}}$

(ז) $\sqrt{\sqrt{2}-1}\cdot\sqrt{\sqrt{2}+1}$ (ח) $\sqrt{\sqrt{5}+2}\cdot\sqrt{\sqrt{5}-2}$

(ט) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ (י) $\sqrt{10-\sqrt{19}}\cdot\sqrt{10+\sqrt{19}}$

(8) פשט את הביטויים הבאים ורשום אותם כביטוי מצומצם ללא שורש במכנה.

(א) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (ב) $\frac{3}{\sqrt{3}}$ (ג) $\frac{14}{\sqrt{7}}$ (ד) $\frac{5}{\sqrt{15}}$

(ה) $\frac{2}{\sqrt{2}-1}$ (ו) $\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ (ז) $\frac{12}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}$ (ח) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}$

(9) רשום ב- $\square$ את הסימן $>$, $<$ או $=$, כך שיתקבל **פסוק אמת**.

(א) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\ \square\ \sqrt{2+\sqrt{3}}$ (ב) $\sqrt{11}+\sqrt{7}\ \square\ \sqrt{10}+\sqrt{8}$

(ג) $\frac{2}{1-\sqrt{2}}\ \square\ \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ (ד) $\sqrt{3}-\sqrt{2}\ \square\ \sqrt{2}-1$

(ה) $\sqrt{11}+4\ \square\ 5+\sqrt{2}$ (ו) $\sqrt{6}+5\ \square\ 4+\sqrt{15}$

(10) הוכח, ללא שימוש במחשבון, את נכונות השוויונות הבאים.

(א) $3\sqrt{20}+\sqrt{45}-\sqrt{80}=5\sqrt{5}$

(ב) $10\sqrt{\frac{1}{5}}+\frac{1}{2}\sqrt{20}-\frac{5}{4}\sqrt{80}=-2\sqrt{5}$

(ג) $\left(3\sqrt{5}-2\right)\left(3\sqrt{5}-1\right)=47-9\sqrt{5}$

(ד) $\left(2\sqrt{6}-2\sqrt{32}+5\sqrt{2}-\frac{1}{4}\sqrt{8}\right)\cdot 3\sqrt{6}=36-21\sqrt{3}$

(ה) $\left(2\sqrt{8}+3\sqrt{5}-7\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{72}+\sqrt{20}-4\sqrt{2}\right)=18$

(11) מצא ללא שימוש במחשבון את ערכי הביטויים שבסעיפים הבאים.

(א) $\sqrt{1-2\sqrt{3}+3}$ (ב) $\sqrt{4+4\sqrt{5}+5}$

★ (ג) $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$ ★ (ד) $\sqrt{11-4\sqrt{7}}$

★ (ה) $\sqrt{7-2\sqrt{10}}$ ★ (ו) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$

(12) רשום את תחום ההגדרה של כל אחד מהביטויים שלפניך. לאחר מכן,
פשט את הביטויים הבאים ורשום אותם כביטוי מצומצם ללא שורש במכנה.

(א) $\frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$ (ב) $\frac{a-4}{\sqrt{a}-2}$ (ג) $\frac{a-9}{\sqrt{a}+3}$ (ד) $\frac{4a-9b}{2\sqrt{a}-3\sqrt{b}}$

(ה) $\frac{ab-b}{\sqrt{ab}-\sqrt{b}}$ (ו) $\frac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ (ז) $\frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{a+\sqrt{ab}}$ (ח) $\frac{a\sqrt{2b}+b\sqrt{2a}}{b+\sqrt{ab}}$

(13) היעזר בפיתוח הביטוי באמצעות נוסחת הכפל המקוצר: $\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2$
והסבר מדוע הסכום של מספר חיובי
והמספר ההופכי לו גדול או שווה ל- 2 .

(14) היעזר בפיתוח הביטוי באמצעות נוסחת הכפל המקוצר: $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$
והסבר מדוע הממוצע החשבוני של שני מספרים חיוביים
גדול או שווה מהממוצע הגיאומטרי שלהם.
הערה: אם נתונים זוג המספרים a ו- b, אזי הממוצע **החשבוני**
שלהם הוא: $\frac{1}{2}(a+b)$ והממוצע **הגיאומטרי** שלהם הוא: $\sqrt{ab}$.

(15) פשט את הביטויים הבאים (תוכל להיעזר גם בכתיב חזקות של חצי).

(א) $x\sqrt{x^5}+\sqrt{9x^7}$ (ב) $2x\sqrt{x^3}+\sqrt{x^5}$

(ג) $x\sqrt{x^5}-\sqrt{4x^7}$ (ד) $(x+1)\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{16(x+1)^5}$

תשובות סופיות

(1) (א) לכל a ממשי. (ב) $a \geq 2$ (ג) $a \geq 3$ (ד) $a \leq 3$
(ה) $|a| \geq 1$, כלומר $a \geq 1$ או $a \leq -1$ (ו) $-4 < a \leq 4$

(2) (א) נכון. (ב) לא נכון. (ג) נכון. (ד) לא נכון.

(3) (א) $2\sqrt{2}$ (ב) $2\sqrt{5}$ (ג) $5\sqrt{2}$ (ד) $3\sqrt{3}$

(ה) $5\sqrt{5}$ (ו) $3\sqrt{30}$ (ז) $5\sqrt{10}$ (ח) $9\sqrt{2}$

(4) (א) $a^2\sqrt{a}$ (ב) $a\sqrt{a}$ (ג) $ab\sqrt{b}$ (ד) $-a^3b^2$

(ה) $a^3b^4c^4\sqrt{c}$ (ו) $ab^2c^7\sqrt{ab}$

(ז) $a^5b^6c^2\sqrt{c}$ (ח) $a^2b^3c^5\sqrt{bc}$

(5) (א) $\sqrt{12}$ (ב) $\sqrt{2}$ (ג) $\sqrt{12}$ (ד) $\sqrt{32}$

(ה) $\sqrt{180}$ (ו) $\sqrt{27}$ (ז) $\sqrt{10}$ (ח) $\sqrt{2}$

(6) (א) $\sqrt{a^7}$ (ב) $\sqrt{a^5b^3}$ (ג) $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$ (ד) $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$

(7) (א) 6 (ב) 18 (ג) 12 (ד) 15 (ה) 12

(ו) 6 (ז) 1 (ח) 1 (ט) 1 (י) 9

(8) (א) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (ב) $\sqrt{3}$ (ג) $2\sqrt{7}$ (ד) $\frac{\sqrt{15}}{3}$

(ה) $2\left(\sqrt{2}+1\right)$ (ו) $\sqrt{7}+\sqrt{3}$

(ז) $-2\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)$ (ח) $2\sqrt{3}-3$

(9) (א) $=$ (ב) $>$ (ג) $>$

(ד) $>$ (ה) $<$ (ו) $>$

(11) (א) $\sqrt{3}-1$ (ב) $\sqrt{5}+2$ (ג) $\sqrt{5}-1$

(ד) $\sqrt{7}-2$ (ה) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ (ו) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

(12) (א) $\sqrt{a}-1\ ,\ a>0$ (ב) $\sqrt{a}+2\ ,\ a\neq 4\ ,\ a\geq 0$

(ג) $\sqrt{a}-3\ ,\ a\geq 0$

(ד) $2\sqrt{a}+3\sqrt{b}\ ,\ a\geq 0\ ,\ b\geq 0\ ,\ 4a\neq 9b$

(ה) $\sqrt{ab}+\sqrt{b}\ ,\ a\neq 1\ ,\ a\geq 0\ ,\ b>0$

(ו) $\sqrt{ab}\ ,\ a\neq b\ ,\ a\geq 0\ ,\ b\geq 0$

(ז) $\sqrt{b}\ ,\ a>0\ ,\ b\geq 0$ (ח) $\sqrt{2a}\ ,\ a\geq 0\ ,\ b>0$

(15) (א) $4\sqrt{x^7}$ (ב) $3\sqrt{x^5}$ (ג) $-\sqrt{x^7}$ (ד) $-3\sqrt{(x+1)^5}$

ו. משוואת המעגל הקנוני

הערה: פרק 14 עוסק בלימוד "המעגל" במסגרת "גיאומטריה אוקלידית".

נזכיר שהמעגל הוא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות במישור, אשר מרחקיהן מנקודה קבועה (הנקראת מרכז המעגל), הוא גודל קבוע (השווה לרדיוס המעגל).
מכאן, המשוואה של מעגל תלויה בשיעורי מרכזו ובאורך הרדיוס שלו.
במסגרת יסודות הגיאומטריה האנליטית נעסוק רק במעגלים שהמרכז שלהם הוא **בראשית הצירים** $O(0,0)$. מעגלים כאלו נקראים **מעגלים קנוניים**.

אם נסמן את רדיוס המעגל באות R, אזי נקודה כלשהי (x,y) תהיה על המעגל, **אם ורק אם** מרחקה מראשית הצירים (השווה למרחקה ממרכז המעגל) יהיה R.
מכאן, תוך שימוש בנוסחה לחישוב מרחק בין שתי נקודות, נקבל את **משוואת המעגל הקנוני**: $\boldsymbol{x^2+y^2=R^2}$.

דוגמא פתורה

הנקודה $A(1,4)$ נמצאת על מעגל שמרכזו בראשית הצירים.

(א) מצא את רדיוס המעגל.

(ב) רשום את משוואת המעגל.

(ג) עבור כל אחת מהנקודות: $B(\sqrt{8},3)$, $C(\sqrt{17},1)$, $D(\sqrt{7},2)$
בדוק וקבע האם הנקודה נמצאת על המעגל, מחוץ לעיגול או בתוך העיגול.

פתרון:

(א) מכיוון שהנקודה A נמצאת על המעגל, הרי שמרחק הנקודה הזו מראשית הצירים שווה לרדיוס המעגל. מכאן: $R=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$.
אורך רדיוס המעגל הוא $\sqrt{17}$ יחידות אורך.

(ב) משוואת המעגל היא: $x^2+y^2=\left(\sqrt{17}\right)^2$ כלומר: $x^2+y^2=17$.

(ג) אם נקודה נמצאת על המעגל, הרי שמרחקה מהראשית **שווה** ל- $\sqrt{17}$.
אם נקודה נמצאת מחוץ לעיגול, הרי שמרחקה מהראשית **גדול** מ- $\sqrt{17}$.
אם נקודה נמצאת בתוך העיגול, הרי שמרחקה מהראשית **קטן** מ- $\sqrt{17}$.

$$d_B=\sqrt{\left(\sqrt{8}\right)^2+3^2}=\sqrt{17}=R \quad \Rightarrow$$ B על המעגל

$$d_C=\sqrt{\left(\sqrt{17}\right)^2+1^2}=\sqrt{18}>R \quad \Rightarrow$$ C מחוץ לעיגול

$$d_D=\sqrt{\left(\sqrt{7}\right)^2+2^2}=\sqrt{11}<R \quad \Rightarrow$$ D בתוך העיגול

תרגילים לעבודה עצמית

(1) בסעיפים הבאים מצא את רדיוס המעגל הקנוני.

(א) $x^2+y^2=49$ (ב) $x^2+y^2=10$

(ג) $9x^2+9y^2=4$ (ד) $16x^2+16y^2=9$

(2) בסעיפים הבאים רשום את משוואת המעגל הקנוני על-פי הנקודה A שעליו.

(א) $A(2,3)$ (ב) $A(-4,3)$ (ג) $A(2.5,-3)$ (ד) $A(\sqrt{2},0)$

(3) נתון המעגל הקנוני: $x^2+y^2=45$. עבור כל אחת מהנקודות שבסעיפים (א) – (ח), קבע ורשום האם הנקודה נמצאת על המעגל, בתוך המעגל או מחוצה לו.

(א) $A(5,-5)$ (ב) $B(-6,3)$ (ג) $C(2,-6)$

(ד) $D(\sqrt{27},-\sqrt{18})$ (ה) $E\left(-\frac{13}{2},\frac{5}{2}\right)$ (ו) $F(4,-\sqrt{29})$

(4) בסעיפים הבאים מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם הצירים.

(א) $x^2+y^2=49$ (ב) $4x^2+4y^2=81$

(ג) $\frac{1}{45}x^2+\frac{1}{45}y^2=20$ (ד) $\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{16}y^2=25$

(5) בסעיפים הבאים מצא את נקודות החיתוך של המעגל ושל הישר הנתונים.

(א) המעגל: $x^2+y^2=9$ והישר: $y=x+3$

(ב) המעגל: $x^2+y^2=25$ והישר: $2x-y-5=0$

תשובות סופיות

(1) (א) $R=7$ (ב) $R=\sqrt{10}$ (ג) $R=\frac{2}{3}$ (ד) $R=\frac{3}{4}$

(2) (א) $x^2+y^2=13$ (ב) $x^2+y^2=25$

(ג) $x^2+y^2=15.25$ (ד) $x^2+y^2=2$

(3) הנק' B , D , F **על המעגל**, הנק' A , E **מחוץ למעגל**, הנק' C **בתוך המעגל**.

(4) (א) $(0,\pm 7)$, $(\pm 7,0)$ (ב) $(0,\pm 4.5)$, $(\pm 4.5,0)$

(ג) $(0,\pm 30)$, $(\pm 30,0)$ (ד) $(0,\pm 20)$, $(\pm 20,0)$

(5) (א) $(0,3)$, $(-3,0)$ (ב) $(4,3)$, $(0,-5)$

פרק 41: חקירת פונקציות פולינום

להלן שלבי חקירת פונקציות פולינום:

(א) מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.

(ב) מציאת נקודות בהן הנגזרת מתאפסת: f'(x) = 0 .

(ג) עריכת טבלת חקירה (ו/או שימוש בנגזרת שנייה לאיפיון קיצון).

(ד) רישום תחומי עלייה וירידה.

(ה) רישום נקודות המקסימום והמינימום של הפונקציה (אם יש).

(ו) שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

הערה: לרוב, השלב הראשון בחקירת פונקציה יהיה רישום תחום הגדרתה. מכיוון שבפרק זה עוסקים בפונקציות פולינום, אין כל מגבלה, ובכל מקרה הפונקציה מוגדרת לכל x . לכן, בפרק זה נחסוך את הטרחה לרשום את תחום ההגדרה עבור כל תרגיל ותרגיל, ונוריד את השלב הזה משלבי החקירה.

<u>דוגמאות פתורות</u>

(1) חקור את הפונקציה $y = x^2(6-x)$ ושרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

<u>פתרון:</u>

(א) נמצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

למציאת נקודת החיתוך עם ציר ה- y , נציב $x = 0$ ונקבל $y = 0$.
כלומר שיעורי נקודת החיתוך עם ציר ה- y הם: $(0,0)$.

למציאת נקודות החיתוך עם ציר ה- x , נציב $y = 0$ ונקבל את המשוואה:
$x^2(6-x) = 0$. פתרונות המשוואה הם: $x_2 = 6$, $x_1 = 0$.
כלומר שיעורי נקודות החיתוך עם ציר ה- x הם: $(6,0)$, $(0,0)$.

(ב) נחשב את נגזרת הפונקציה: $y = 6x^2 - x^3 \quad \Rightarrow \quad y' = 12x - 3x^2$

נשווה את הנגזרת לאפס: $12x - 3x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x(4-x) = 0$

נקבל שתי נקודות החשודות לקיצון: $x_1 = 0 \ , \ x_2 = 4$

המשך בעמוד הבא >>>

(ג) נערוך טבלת חקירה.

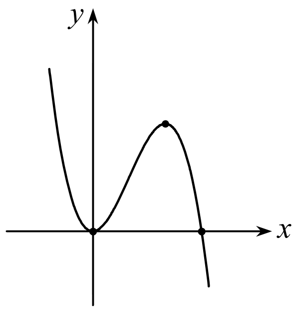
x	$x<0$	$x=0$	$0<x<4$	$x=4$	$x>4$
y	↘	$y=0$	↗	$y=32$	↘
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
מסקנות	ירידה	min	עלייה	max	ירידה

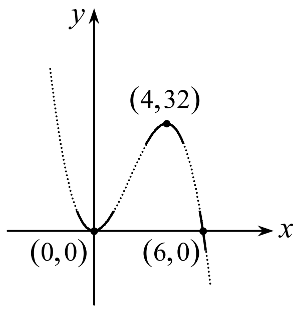
(ד) נרשום מתוך הטבלה את תחומי העלייה והירידה.

תחום עלייה: $0<x<4$. תחומי ירידה: $x>4$ או $x<0$.

(ה) נקודות הקיצון: $\min(0,0)$, $\max(4,32)$

(ו) סקיצה של גרף הפונקציה: נסמן תחילה את נקודות החיתוך עם הצירים ואת נקודות הקיצון על-גבי מערכת צירים, ונסמן סביבן את התנהגות הפונקציה: מינימום, מקסימום, עלייה, ירידה (ראה שרטוט מימין). כעת נעביר ביניהן קו עקום חלק ונקבל את הסקיצה (ראה שרטוט משמאל).





(2) חקור את הפונקציה $y=12x^3-9x^4$ ושרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

פתרון:

(א) נמצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

למציאת נקודת החיתוך עם ציר ה- y , נציב $x=0$ ונקבל $y=0$.

כלומר שיעורי נקודת החיתוך עם ציר ה- y הם: $(0,0)$.

למציאת נקודות החיתוך עם ציר ה- x , נציב $y=0$ ונקבל את המשוואה:

$12x^3-9x^4=0$. פתרונות המשוואה הם: $x_1=0$, $x_2=\frac{4}{3}$.

כלומר שיעורי נקודות החיתוך עם ציר ה- x הם: $\left(\frac{4}{3},0\right)$, $(0,0)$.

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(ב) נחשב את נגזרת הפונקציה: $y' = 36x^2 - 36x^3$

נשווה את הנגזרת לאפס: $36x^2(1-x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 36x^2 - 36x^3 = 0$

נקבל שתי נקודות החשודות לקיצון: $x_1 = 0\ ,\ x_2 = 1$

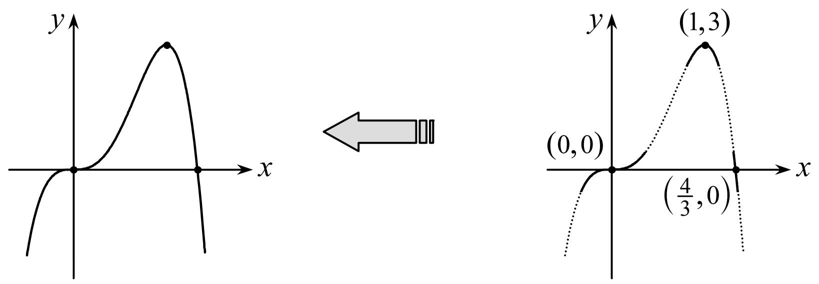
(ג) נבנה טבלת חקירה:

x	$x<0$	$x=0$	$0<x<1$	$x=1$	$x>1$
y	↗	$y=0$	↗	$y=3$	↘
y'	$+$	0	$+$	0	$-$
מסקנות	עלייה	פיתול (נק' עלייה)	עלייה	max	ירידה

(ד) נרשום מתוך הטבלה את תחומי העלייה והירידה:
תחום עלייה: $x<1$. תחום ירידה: $x>1$.

(ה) נקודת הקיצון: $\max(1,3)$

(ו) סקיצה של גרף הפונקציה:



(3) נתונה הפונקציה: $y = \mathrm{a}x^2 - \frac{1}{4}x^4$. לפונקציה יש נקודת קיצון כאשר $x=2$. חקור את הפונקציה ושרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

פתרון:

לפני שנתחיל בשלבי החקירה, נמצא את ערכו של הפרמטר a .

נגזור את הפונקציה: $y' = 2\mathrm{a}x - x^3$

נציב בנגזרת $x=2$ ונשווה ל- 0: $y'(2) = 4\mathrm{a} - 8 = 0$

מכאן נקבל: $\mathrm{a} = 2$, כלומר הפונקציה היא: $y = 2x^2 - \frac{1}{4}x^4$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(א) נמצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

למציאת נקודת החיתוך עם ציר ה- y , נציב $x = 0$ ונקבל $y = 0$.
כלומר שיעורי נקודת החיתוך עם ציר ה- y הם: $(0,0)$.

למציאת נקודות החיתוך עם ציר ה- x , נציב $y = 0$ ונקבל את המשוואה:
$$2x^2 - \frac{1}{4}x^4 = 0 \quad \Rightarrow \quad 8x^2 - x^4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2\left(8 - x^2\right) = 0$$
פתרונות המשוואה הם: $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{8}$.
כלומר שיעורי נקודות החיתוך עם ציר ה- x הם: $(\pm\sqrt{8},0)$, $(0,0)$.

(ב) נחשב את נגזרת הפונקציה: $y' = 4x - x^3$
נשווה את הנגזרת לאפס: $4x - x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x\left(4 - x^2\right) = 0$
נקבל שלוש נקודות החשודות לקיצון: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$

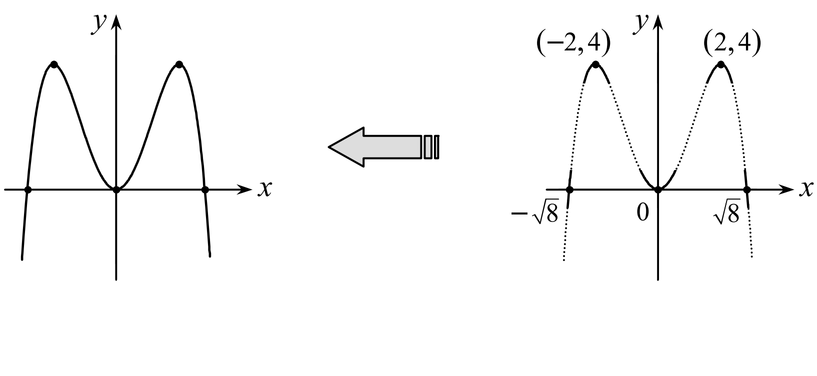
(ג) נבנה טבלת חקירה:

x	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
y	↗	$y = 4$	↘	$y = 0$	↗	$y = 4$	↘
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
מסקנות	עלייה	max	ירידה	min	עלייה	max	ירידה

(ד) נרשום מתוך הטבלה את תחומי העלייה והירידה:
תחומי עלייה: $0 < x < 2$ או $x < -2$.
תחומי ירידה: $x > 2$ או $-2 < x < 0$.

(ה) נקודות הקיצון: $\max(2,4)$, $\min(0,0)$, $\max(-2,4)$

(ו) סקיצה של גרף הפונקציה:



תרגילים לעבודה עצמית

בתרגילים **(1)** – **(8)** חקור את הפונקציות וענה על הסעיפים הבאים:

(א) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

(ב) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

(ג) רשום את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

(ד) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(1) $f(x)=x^2(3-x)$ (2) $f(x)=4x-\frac{x^3}{3}$

(3) $f(x)=x^4-6x^3+9x^2$ (4) $f(x)=3x^5-5x^3$

(5) $f(x)=x^3(x+2)^2$ (6) $f(x)=\frac{1}{4}(x-2)^2(x+4)$

(7) $f(x)=\frac{1}{81}\left(9-x^2\right)^3$ (8) $f(x)=\frac{8x^3-x^4}{36}$

(9) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{64}(x+\mathrm{a})^2(x-\mathrm{a})$

ידוע שלפונקציה יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x=2$.

(א) מצא את ערכו של הפרמטר a אם נתון כי $\mathrm{a}>0$.

(ב) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

(ג) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

(ד) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

(ה) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(ו) רשום כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה $f(x)$ עם הישר $y=\mathrm{k}$, בהתאם לערכים השונים של k .

(10) נתונה הפונקציה: $f(x)=\mathrm{m}^2x^3+\mathrm{m}x^2-5x$ ($\mathrm{m}>0$).

(א) הראה שגרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בשלוש נקודות שונות.

(ב) הבע באמצעות m את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוג הקיצון.

(ג) הבע באמצעות m את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

(ד) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(ה) ידוע כי הישר $y=\mathrm{k}$ חותך את גרף הפונקציה שלוש פעמים. מהו תחום הערכים של k (הבע באמצעות m לפי הצורך).

תשובות סופיות

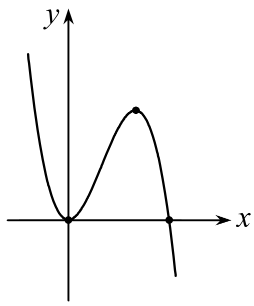
(1) (א) $(3,0)$, $(0,0)$

(ב) $\min\ (0,0)$, $\max\ (2,4)$

(ג) תחום עלייה: $0<x<2$

תחומי ירידה: $x<0$, $x>2$

(ד) ראה שרטוט משמאל.



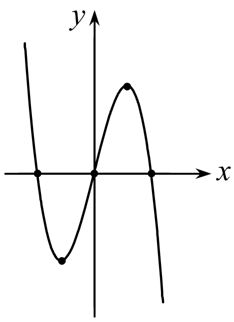
(2) (א) $(\pm\sqrt{12},0)$, $(0,0)$

(ב) $\min\left(-2,-5\frac{1}{3}\right)$, $\max\left(2,5\frac{1}{3}\right)$

(ג) תחום עלייה: $-2<x<2$

תחומי ירידה: $x<-2$, $x>2$

(ד) ראה שרטוט משמאל.



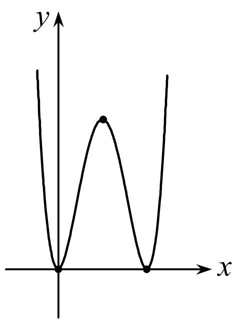
(3) (א) $(3,0)$, $(0,0)$

(ב) $\min\ (3,0)$, $\max\left(1\frac{1}{2},5\frac{1}{16}\right)$, $\min\ (0,0)$

(ג) תחומי עלייה: $0<x<1.5$, $x>3$

תחומי ירידה: $x<0$, $1.5<x<3$

(ד) ראה שרטוט משמאל.



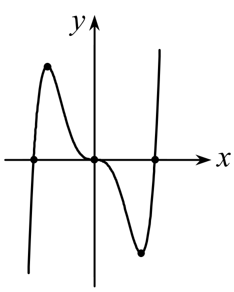
(4) (א) $\left(\pm\sqrt{\frac{5}{3}},0\right)$, $(0,0)$

(ב) $\max\ (-1,2)$, $\min\ (1,-2)$

(ג) תחומי עלייה: $x<-1$, $x>1$

תחום ירידה: $-1<x<1$

(ד) ראה שרטוט משמאל.



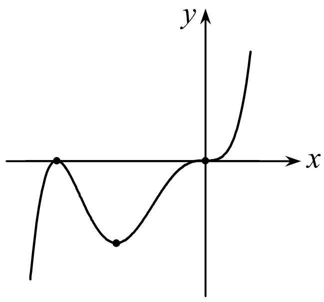
(5) (א) $(-2,0)$, $(0,0)$

(ב) $\max\ (-2,0)$, $\min\ (-1.2,-1.106)$

(ג) תחומי עלייה: $x > -1.2$, $x < -2$

תחום ירידה: $-2 < x < -1.2$

(ד) ראה שרטוט משמאל.



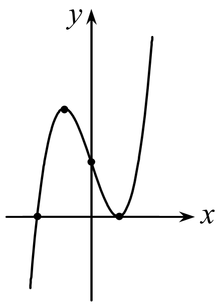
(6) (א) $(2,0)$, $(-4,0)$, $(0,4)$

(ב) $\max\ (-2,8)$, $\min\ (2,0)$

(ג) תחומי עלייה: $x > 2$, $x < -2$

תחום ירידה: $-2 < x < 2$

(ד) ראה שרטוט משמאל.



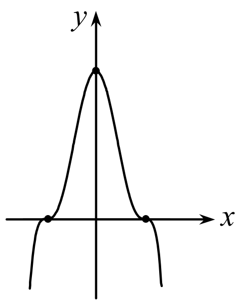
(7) (א) $(0,9)$, $(3,0)$, $(-3,0)$

(ב) $\max\ (0,9)$

(ג) תחום עלייה: $x < 0$

תחום ירידה: $x > 0$

(ד) ראה שרטוט משמאל.



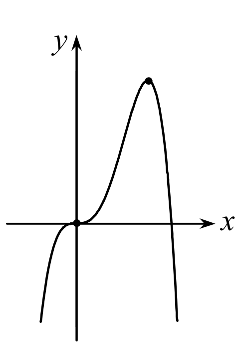
(8) (א) $(0,0)$, $(8,0)$

(ב) $\max\ (6,12)$

(ג) תחום עלייה: $x < 6$

תחום ירידה: $x > 6$

(ד) ראה שרטוט משמאל.



(9) (א) $a = 6$

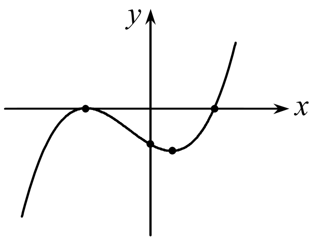
(ב) $\max\ (-6,0)\ \ ,\ \ \min\ (2,-4)$

(ג) תחומי עלייה: $x < -6\ \ ,\ \ x > 2$

תחום ירידה: $-6 < x < 2$

(ד) $(6,0)\ \ ,\ \ (-6,0)\ \ ,\ \ \left(0,-\frac{27}{8}\right)$

(ה) ראה שרטוט משמאל.



(ו) פתרון יחיד: $k > 0$ או $k < -4$

שני פתרונות: $k = 0$ או $k = -4$

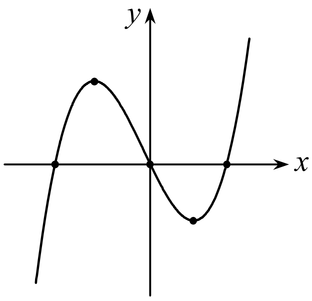
שלושה פתרונות: $-4 < k < 0$

(10) (ב) $\max\ \left(-\frac{5}{3m},\frac{175}{27m}\right)\ \ ,\ \ \min\ \left(\frac{1}{m},-\frac{3}{m}\right)$

(ג) תחומי עלייה: $x > \frac{1}{m}\ \ ,\ \ x < -\frac{5}{3m}$

תחום ירידה: $-\frac{5}{3m} < x < \frac{1}{m}$

(ד) ראה שרטוט משמאל.



(ה) $-\frac{3}{m} < k < \frac{175}{27m}$