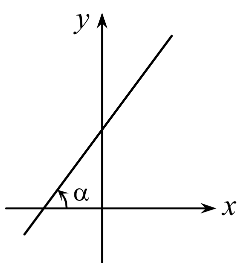
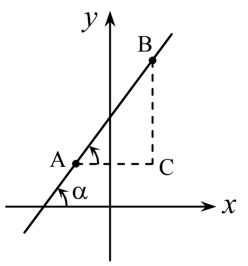
פרק 29: הקשר בין פונקצית הטנגנס לשיפוע של קו ישר



לכל ישר **שאינו** מקביל לציר ה- y ומשוואתו המפורשת היא: $y = \mathrm{m}x + \mathrm{n}$ מתקיים: $\mathrm{m} = \mathrm{tg}\,\alpha$ כאשר α היא זווית בין הישר ובין הכיוון החיובי של ציר ה- x (ראה ציור).

נוכיח את נכונות הקשר הנ"ל. ראשית, נתייחס למקרה המיוחד בו הישר מקביל לציר ה- x (או מתלכד איתו).

ככלל, זווית בין ישרים מקבילים (או מתלכדים) מוגדרת להיות $0°$ ולכן בפרט הזווית בין ישר המקביל לציר ה- x לבין ה- x עצמו היא $0°$, ואכן, שיפוע ישר כזה הוא $\mathrm{m} = 0$ ומתקיים: $\mathrm{tg}\,0° = 0$.



כעת נתייחס למקרה בו $\mathrm{m} \neq 0$. נסמן על הישר שתי נקודות A ו- B ששיעורי ה- x שלהן: x_1 ו- x_2 בהתאמה (ראה ציור). מכאן, שיעורי הנקודות הם: $\mathrm{A}(x_1, \mathrm{m}x_1 + \mathrm{n})$, $\mathrm{B}(x_2, \mathrm{m}x_2 + \mathrm{n})$.

נעביר דרך הנקודה A ישר המקביל לציר ה- x ודרך נקודה B ישר המקביל לציר ה- y. שני הישרים הללו נחתכים בנקודה C (ראה ציור) ששיעוריה הם: $\mathrm{C}(x_2, \mathrm{m}x_1 + \mathrm{n})$.

נחשב במשולש ישר-זווית ABC את אורכי הניצבים AC ו- BC:

$$\mathrm{AC} = x_{\mathrm{C}} - x_{\mathrm{A}} = x_2 - x_1$$

$$\mathrm{BC} = y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{C}} = (\mathrm{m}x_2 + \mathrm{n}) - (\mathrm{m}x_1 + \mathrm{n}) = \mathrm{m}(x_2 - x_1)$$

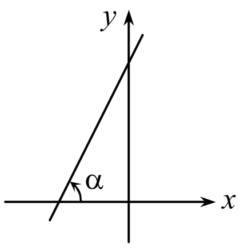
נחשב את $\mathrm{tg}\,\measuredangle\mathrm{BAC}$ במשולש ישר-זווית ABC ונקבל:

$$\mathrm{tg}\,\measuredangle\mathrm{BAC} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{m}(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = \mathrm{m}$$

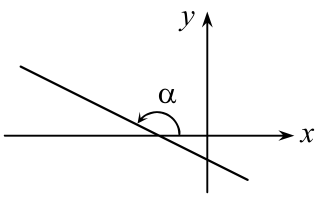
מכיוון שהקטע AC מקביל לציר ה- x, הרי שהזווית בין הישר הנתון לכיוון החיובי של ציר ה- x שווה לזווית BAC (אלו הן זוויות מתאימות בין ישרים מקבילים) ולכן: $\mathrm{tg}\,\measuredangle\mathrm{BAC} = \mathrm{tg}\,\alpha$ ומכאן: $\mathrm{m} = \mathrm{tg}\,\alpha$.

דוגמאות פתורות

(1) נתון הישר שמשוואתו $y = 2x + 3$ (ראה ציור).
הזווית α שיוצר הישר עם הכיוון החיובי
של ציר ה- x (ראה ציור משמאל) מקיימת:
$\text{tg}\,\alpha = 2$ ומכאן: $\boldsymbol{\alpha = 63.43°}$.

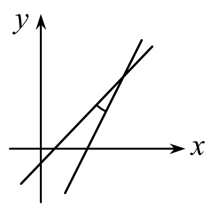


(2) נתון הישר שמשוואתו $y = -\frac{x}{2} - 2$ (ראה ציור).
הזווית α שיוצר הישר עם הכיוון החיובי
של ציר ה- x (ראה ציור משמאל) מקיימת:
$\text{tg}\,\alpha = -\frac{1}{2}$ ומכאן: $\boldsymbol{\alpha = 153.43°}$.
שים לב: כאשר שיפוע הישר שלילי, אז הזווית שבין
הישר לבין הכיוון החיובי של ציר ה- x היא זווית קהה.

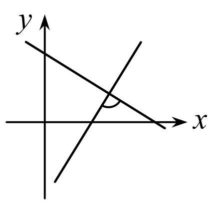


תרגילים לעבודה עצמית

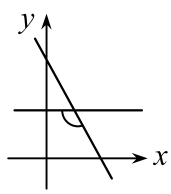
(1) בכל אחד מארבעת הציורים להלן מתוארים שני ישרים.



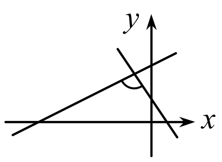
ציור ①



ציור ②



ציור ③



ציור ④

נתונים להלן ארבעה זוגות של שני ישרים:

זוג (א): $\left.\begin{array}{l} y = \frac{8}{5}x - 7 \\ y = -\frac{5}{8}x + 4 \end{array}\right\}$

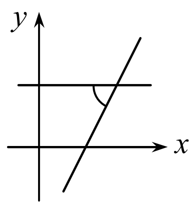
זוג (ב): $\left.\begin{array}{l} y = 5x - 8 \\ y = 7x - 18 \end{array}\right\}$

זוג (ג): $\left.\begin{array}{l} y = -\frac{3}{2}x + 2 \\ y = \frac{1}{2}x + 5 \end{array}\right\}$

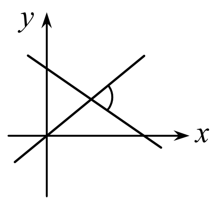
זוג (ד): $\left.\begin{array}{l} y = 5 \\ y = -3x + 10 \end{array}\right\}$

התאם, תחילה, לכל ציור זוג משוואות ולאחר מכן, בעזרת מחשבון,
מצא את הזווית המסומנת, שבין שני הישרים שבכל ציור.
הנחייה: מצא תחילה את הזווית שיוצר כל אחד מזוג הישרים עם הכיוון החיובי
של ציר ה- x ורק לאחר מכן היעזר בחישובי זוויות למציאת הזווית המבוקשת.

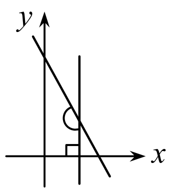
(2) בכל אחד מארבעת הציורים להלן מתוארים שני ישרים.



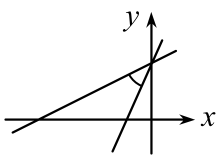
ציור ①



ציור ②



ציור ③



ציור ④

נתונים להלן ארבעה זוגות של שני ישרים, המיוצגים באמצעות נקודות החיתוך שלהם עם הצירים, או באמצעות נקודה ושיפוע.

זוג (א): $\left\{\begin{matrix}(0.8,0)\ ,\ (0,4)\\(0.5,0)\end{matrix}\right.$ זוג (ב): $\left\{\begin{matrix}(-9,0)\ ,\ (0,3)\\(-1.5,0)\ ,\ (0,3)\end{matrix}\right.$

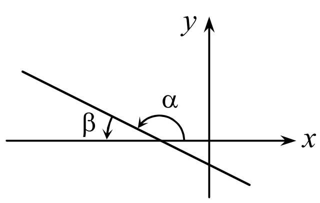
זוג (ג): $\left\{\begin{matrix}(0,0)\ ,\ m=0.8\\(1.5,0)\ ,\ (0,0.9)\end{matrix}\right.$ זוג (ד): $\left\{\begin{matrix}(0,4)\ ,\ m=0\\(3,0)\ ,\ (0,-6)\end{matrix}\right.$

התאם לכל ציור זוג ישרים, מצא את שיפועי הישרים שאינם נתונים ולאחר מכן, בעזרת מחשבון, מצא את הזווית המסומנת, שבין שני הישרים שבכל ציור.

(ראה הנחייה לתרגיל מס' 1.)

(3) במערכת צירים נתון ישר ששיפועו שלילי: $m<0$.

הזווית שיוצר הישר עם הכיוון החיובי של ציר ה- x היא קהה. הוכח את נכונות הקשר $m=tg\alpha$ גם עבור מקרה זה, על-פי הסעיפים הבאים:



(א) הראה עבור הזווית β שיוצר הישר עם הכיוון השלילי של ציר ה- x שמתקיים: $m=-tg\beta$.

(ב) היעזר בזהות $tg\alpha=-tg(180°-\alpha)$ והראה כי: $m=tg\alpha$.

תשובות סופיות

(1) (א)-② , $90°$ (ב)-① , $3.18°$

(ג)-④ , $97.13°$ (ד)-③ , $108.43°$

(2) (א)-③ , $168.69°$ (ב)-④ , $45°$

(ג)-② , $69.62°$ (ד)-① , $63.43°$