

מדינת ישראל

משרד החינוך התרבות והספורט

סוג הבחינה: בגרות לבתי"ס על-יסודיים
מועד הבחינה: חורף תשס"ה
מספר השאלון: 035007
נספח: דפי נוסחאות ל-4 ול-5 יח"ל

מתמטיקה

שאלון ז'

הוראות לנבחן

- א. משך הבחינה: שעה ושלושה רבעים.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:
בשאלון זה שש שאלות בנושאים:
גאומטריה אנליטית, וקטורים, מספרים
מרוכבים, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות.
עליך לענות על שלוש שאלות –

$$3 \times 33 \frac{1}{3} = 100 \text{ נק'}$$

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
2. דפי נוסחאות (מצורפים).
3. הוראות מיוחדות:
 1. אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
 2. התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
 3. לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים. שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

דولة إسرائيل

وزارة المعارف والثقافة والرياضة

نوع الامتحان: بجلوت للمدارس الثانوية
موعد الامتحان: شتاء ٢٠٠٥/٠٤
رقم النموذج: ٠٣٥٠٠٧
ملحق: لوائح قوانين ل-٤ و-٥ وحدات تعليمية

الرياضيات

النموذج "ز"

تعليمات للممتحن

- أ. مدة الامتحان: ساعة وثلاثة أرباع.
- ب. مبنی النموذج وتوزيع الدرجات:
في هذا النموذج ستة أسئلة في المواضيع:
الهندسة التحليلية، متجهات، أعداد مركبة،
دوال أسية ولوغريتمية.
عليك الإجابة عن ثلاثة أسئلة –

$$3 \times 33 \frac{1}{3} = 100 \text{ درجة}$$

ج. مواد مساعدة يُسمح استعمالها:

1. حاسبة غير بيانية. لا يُسمح استعمال إمكانيات البرمجة في الحاسبة التي يمكن برمجتها. استعمال الحاسبة البيانية أو إمكانيات البرمجة في الحاسبة قد يؤدي إلى إلغاء الامتحان.
2. لوائح قوانين (مرفقة).
3. تعليمات خاصة:

1. لا تنسخ السؤال؛ اكتب رقمه فقط.
2. ابدأ كل سؤال في صفحة جديدة. اكتب في الدفتر مراحل الحل، حتى إذا أجريت حساباتك بواسطة حاسبة. فسّر كل عملياتك، بما في ذلك العمليات الحسابية، بالتفصيل ووضوح وبترتيب. عدم التفصيل قد يؤدي إلى خصم درجات أو إلى إلغاء الامتحان.
3. لكتابة مسودة يجب استعمال دفتر الامتحان أو الأوراق التي حصلت عليها من المراقبين. استعمال مسودة أخرى قد يؤدي إلى إلغاء الامتحان.

التعليمات في هذا النموذج مكتوبة بصيغة المذكر وموجهة للممتحنات وللممتحنين على حد سواء.

نتمنى لك النجاح !

ب ه ل ح ه !

الأسئلة

أجب عن ثلاثة من الأسئلة ١-٦ (لكل سؤال - $\frac{1}{3}$ درجة).
إذا أجبتَ عن أكثر من ثلاثة أسئلة، تُفحص فقط ثلاث الإجابات الأولى التي في دفترِكَ.

الهندسة التحليلية

١. معطاة الدائرة $x^2 + y^2 = R^2$.

أ. جد معادلة المحلّ الهندسي لمراكز الدوائر التي تمسّ المحور y

والدائرة المعطاة من الداخل (عبر بدلالة R).

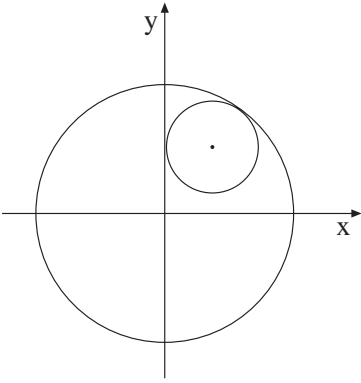
معطى أنّ مراكز الدوائر موجودة في الربع الأوّل

(انظر الرسم).

ب. الدائرة $(x-8)^2 + (y-6)^2 = 64$ تمسّ المحور y

والدائرة المعطاة من الداخل.

جد R .



متجهات

٢. معطى المستوى $mx + 3y + z + 3 = 0$ ،

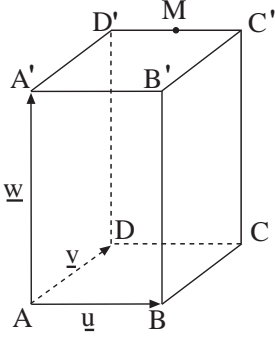
ومعطى المستقيم $\underline{x} = (3, 0, -9) + t(2m, -5, 7)$.

أ. جد قيمة m التي بالنسبة لها يكون المستقيم محوياً في المستوى.

ب. جد قيمة m التي بالنسبة لها يقطع المستقيم المستوى في نقطة واحدة فقط

التي فيها $z = 5$ ، وَاَجِدِ النقطَةَ.

٣. في منشور قائم $ABCD A'B'C'D'$ ، القاعدة $ABCD$ هي معين.
 نرسم: $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$ ، $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$ ، $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$ (انظر الرسم).
 معطى أن: $|\underline{w}| = 5$ ، $|\underline{u}| = 4$.



- أ. النقطة M هي منتصف الضلع $D'C'$ (انظر الرسم).

عبر عن المتجه \overrightarrow{AM} بدلالة \underline{u} و \underline{v} و \underline{w} .

معطى أيضاً أن $|\overrightarrow{AM}| = 7$.

ب. جد مقدار الزاوية التي بين المتجهين \underline{u} و \underline{v} .

ج. N هي نقطة على المستقيم BC . نرسم $\overrightarrow{NC} = t \overrightarrow{BC}$.

جد قيم t التي بالنسبة لها $|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{NM}|$.

أعداد مركبة

٤. $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$ هو عدد مركب على دائرة الوحدة ($0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$).

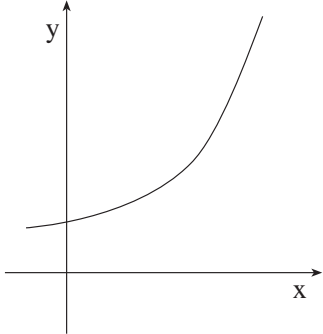
أ. حل المعادلة $z \cdot \bar{z} = z + \bar{z}$.

ب. حلا z اللذان وجدتهما في البند "أ"، هما رأسا مثلث متساوي الأضلاع محصور

في دائرة الوحدة.

جد الرأس الثالث للمثلث. علل إجابتك.

دوال أسية ولو غريشمية



٥. معطاة الدالة $y = e^{\frac{x}{2}}$ (انظر الرسم).

مرروا مستقيماً يمسّ الرسم البياني للدالة

في نقطة في الربع الأول فيها $x = t$.

أ. عبّر بدلالة t عن معادلة المماس.

ب. معطى أنّ هذا المماس يقطع المحور x

في النقطة التي فيها $x = 2$.

احسب المساحة المحصورة بين الرسم البياني للدالة والمماس والمحور y .

٦. معطاة الدالة $y = \ln(x^2) - \frac{1}{a}x^2$ ، $a > 0$.

أ. ما هو مجال تعريف الدالة؟

ب. عبّر بدلالة a عن إحداثيات النقاط القصوى للدالة، وحدّد نوعها.

ج. لأيّة قيم a يكون كلّ الرسم البياني للدالة موجوداً تحت المحور x ؟

**בהצלחה!
נמני לך הנחא!**

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל.

אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך התרבות והספורט.

חقوق الطبع محفوظة לדولة إسرائيل.

النسخ أو النشر ممنوعان إلا بإذن من وزارة المعارف والثقافة والرياضة.

נוסחאון מתמטיקה

5-4 יחידות לימוד (החל מקיץ תש"ן)

لائحة قوانين في الرياضيات

٤-٥ وحدات تعليمية (ابتداءً من صيف ٩٠)

الجبر

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$$

التحليل إلى عوامل

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k + \dots + b^n$$

القانون ذو الحدين لنيوتن

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

قوانين فيبتي

$$(x_{1,2}) = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{جذرا معادلة تربيعية. } x_1, x_2$$

المتواليات

متوالية هندسية	متوالية حسابية	
$a_n = a_1 q^{n-1}$	$a_n = a_1 + (n-1)d$	الحد ال-n-ي:
$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$	$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$	المجموع:

$$z = a + bi = r(\cos\theta + i \sin\theta)$$

الأعداد المركبة

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

حاصل ضرب بتمثيل قطبي:

$$(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

قانون دي موابر:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) \right] \quad \text{جذور المعادلة } z^n = r(\cos\alpha + i \sin\alpha) \text{ هي:}$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1$$

التوافيق والتباديل

$$p_n = n!$$

عدد التباديل لـ n عناصر (بدون إعادات):

عدد التباديل لـ n عناصر والتي تضم n_1, n_2, \dots, n_k عناصر متساوية بينها:

$$P_n = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

عدد التباديل لـ k من بين n عناصر (بدون إعادات):

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

عدد التوافيق لـ k من بين n عناصر (بدون إعادات):

لائحة قوانين في الرياضيات ، ٤-٥ وحدات تعليمية

المتجهات

مستوى عبر أطراف المتجهات $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$, $\vec{c} = \vec{OC}$: $\vec{x} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}) + s(\vec{c} - \vec{a})$

حاصل ضرب عددي: $(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos\alpha$

التعامد: $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$

طول المتجه: $|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

البعد بين $z = (z_1, z_2, z_3)$ والمستوى $\vec{a} \cdot \vec{x} + c = 0$: $\frac{|\vec{a} \cdot \vec{z} + c|}{|\vec{a}|}$

الزاوية بين المستقيم $t\vec{b} + d$ والمستوى $\vec{a} \cdot \vec{x} + c = 0$: $\sin\beta = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

الزاوية بين المستويين $\vec{a} \cdot \vec{x} + c = 0$, $\vec{b} \cdot \vec{x} + d = 0$: $\cos\alpha = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

القوى واللوغريثمات : $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$, $a^{\log_a x} = \log_a(a^x) = x$

حساب المثلثات

المتطابقات

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

قانون جيب التمام: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$
مساحة قطاع: $\frac{1}{2}r^2\alpha$

قانون الجيب: $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$
طول قوس ذي α راديانات: $r\alpha$

الهندسة الفراغية

حجم المخروط والهرم (B - مساحة القاعدة): $V = \frac{B \cdot h}{3}$ حجم الكرة: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

مساحة غلاف المخروط: $M = \pi R \ell$ مساحة السطح الخارجي للكرة: $P = 4\pi R^2$

التحليل (حساب التفاضل والتكامل)

المشتقات

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$\sin'x = \cos x$$

$$\operatorname{arc} \sin'x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - v'u}{v^2}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$\cos'x = -\sin x$$

$$\operatorname{arc} \cos'x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\log_a'x = \frac{1}{x \ln a}$$

$$\operatorname{tg}'x = \frac{1}{\cos^2x}$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg}'x = \frac{1}{1+x^2}$$

قانون السلسلة: $f'(x) = v'(u) \cdot u'(x)$


נסחאון מתמטיקה, 5-4 יחידות לימוד
 לאיטה قوانین في الرياضيات ، ٤-٥ وحدات تعليمية

$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$ التكامل

$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} [f(a) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(b)]$ قانون شبه المنحرف:

دیوال

دالة زوجية: $f(x) = f(-x)$ دالة فردية: $f(-x) = -f(x)$

نقطة الانعطاف: نقطة التحول من التحدب إلى التقعر  دالة مقعرة:

الاحصاء والاحتمال

$S = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 f_1 + (x_2 - \bar{x})^2 f_2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2 f_n}{N}}$ الانحراف المعياري:

x_n, \dots, x_2, x_1 التكرارات لـ f_n, \dots, f_2, f_1

$f_1 + f_2 + \dots + f_n = N$: معدل المعطيات \bar{x}

قانون برنولي: الاحتمال لـ k نجاحات في n محاولات في توزيع ذي حدين مع احتمال p :

$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

جدول التوزيع الطبيعي (0,1) المتراكم

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.500	504	508	512	516	520	524	528	532	536
0.1	0.540	544	548	552	556	560	564	568	571	575
0.2	0.579	583	587	591	595	599	603	606	610	614
0.3	0.618	622	625	629	633	637	641	644	648	652
0.4	0.655	659	663	666	670	674	677	681	684	688
0.5	0.692	695	699	702	705	709	712	716	719	722
0.6	0.726	729	732	736	739	742	745	749	752	755
0.7	0.758	761	764	767	770	773	776	779	782	787
0.8	0.788	791	794	797	800	802	805	809	811	813
0.9	0.816	819	821	824	826	829	832	834	837	839
1.0	0.841	844	846	848	851	853	855	858	860	862
1.1	0.864	866	869	871	873	875	877	879	881	883
1.2	0.885	887	889	891	893	894	896	898	900	902
1.3	0.903	905	907	908	910	911	913	915	916	918
1.4	0.919	921	922	924	925	926	928	929	931	932
1.5	0.933	935	936	937	938	939	941	942	943	944
1.6	0.945	946	947	948	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1.7	0.9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1.8	0.9641	9650	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1.9	0.9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9762	9767
2.0	0.9773	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2.1	0.9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2.2	0.9861	9865	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2.3	0.9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2.4	0.9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2.5	0.9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2.6	0.9954	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2.7	0.9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2.8	0.9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2.9	0.9981	9982	9983	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3.0	0.9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990

الهندسة التحليلية

الخط المستقيم

معادلة مستقيم يمرّ عبر النقطة (x_1, y_1) وميله m : $y - y_1 = m(x - x_1)$

قانون للزاوية α التي بين المستقيمين $y = m_2x + n_2$, $y = m_1x + n_1$: $\text{tg}\alpha = \left[\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right]$

تعامد المستقيمين $y = m_2x + n_2$, $y = m_1x + n_1$: $m_1 \cdot m_2 = -1$

بُعد النقطة $(x_0; y_0)$ عن المستقيم $Ax + By + C = 0$: $d = \pm \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

النقطة التي تقسم القطعة AB بنسبة $k : \ell$: $\left(\frac{\ell x_1 + kx_2}{k + \ell}, \frac{\ell y_1 + ky_2}{k + \ell} \right)$: $(A(x_1, y_1); B(x_2, y_2))$

الدائرة

معادلة مماس الدائرة $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ في النقطة $(x_0; y_0)$:

$$(x_0 - a) \cdot (x - a) + (y_0 - b) \cdot (y - b) = R^2$$

القطع الزائد : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

خطوط التقارب: $y = \pm \frac{b}{a}x$

بُعد البؤرة عن نقطة الأصل: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

المماس للقطع الزائد في النقطة $(x_0; y_0)$: $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$

الشرط بأن يمسّ المستقيم $y = mx + n$ القطع الزائد: $n^2 = m^2 a^2 - b^2$

القطع المكافئ : $y^2 = 2px$

مماس القطع المكافئ في النقطة $(x_0; y_0)$: $yy_0 = p(x + x_0)$

الشرط بأن يمسّ المستقيم $y = mx + n$ القطع المكافئ: $n = \frac{p}{2m}$