מדינת ישראל

משרד החינוך התרבות והספורט

סוג הבחינה: בגרות לבתי"ס על-יסודיים
מועד הבחינה: חורף תשס"ה
מספר השאלון: 035006
נספח: דפי נוסחאות ל-4 ול-5 יח"ל

מתמטיקה

שאלון ו'

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעה ושלושה רבעים.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:
בשאלון זה שני פרקים.
פרק ראשון: אלגברה – 1×$33\frac{1}{3}$ – $33\frac{1}{3}$ נק'
פרק שני: חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי, טריגונומטריה – 2×$33\frac{1}{3}$ – $66\frac{2}{3}$ נק'
סה"כ – 100 נק'

ג. חומר עזר מותר בשימוש:
1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
2. דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:
1. אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
2. התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
3. לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים. שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

دولة إسرائيل

وزارة المعارف والثقافة والرياضة

نوع الامتحان: بجروت للمدارس الثانوية
موعد الامتحان: شتاء ٢٠٠٥/٠٤
رقم النموذج: ٠٣٥٠٠٦
ملحق: لوائح قوانين لِـ ٤ وَ ٥ وحدات تعليمية

الرياضيات

النموذج "و"

تعليمات للممتحَن

أ. مدّة الامتحان: ساعة وثلاثة أرباع.

ب. مبنى النموذج وتوزيع الدرجات:
في هذا النموذج فصلان.
الفصل الأوّل: الجبر –
١×$٣٣\frac{١}{٣}$ – $٣٣\frac{١}{٣}$ درجة
الفصل الثاني: حساب التفاضل والتكامل،
حساب المثلثات – ٢×$٣٣\frac{١}{٣}$ – $٦٦\frac{٢}{٣}$ درجة
المجموع – ١٠٠ درجة

جـ. موادّ مساعدة يُسمح استعمالها:
١. حاسبة غير بيانية. لا يُسمح استعمال إمكانيات البرمجة في الحاسبة التي يمكن برمجتها. استعمال الحاسبة البيانية أو إمكانيات البرمجة في الحاسبة قد يؤدّي إلى إلغاء الامتحان.
٢. لوائح قوانين (مرفقة).

د. تعليمات خاصّة:
١. لا تنسخ السؤال؛ اكتب رقمه فقط.
٢. ابدأ كلّ سؤال في صفحة جديدة. اكتب في الدفتر مراحل الحلّ، حتّى إذا أجريتَ حساباتك بواسطة حاسبة. فسّر كلّ عملياتك، بما في ذلك العمليات الحسابية، بالتفصيل وبوضوح وبترتيب. عدم التفصيل قد يؤدّي إلى خصم درجات أو إلى إلغاء الامتحان.
٣. لكتابة مسوّدة يجب استعمال دفتر الامتحان أو الأوراق التي حصلتَ عليها من المراقبين. استعمال مسوّدة أخرى قد يؤدّي إلى إلغاء الامتحان.

التعليمات في هذا النموذج مكتوبة بصيغة المذكّر وموجّهة للممتحَنات وللممتحَنين على حدّ سواء.

ب ה צ ל ח ה !

نتمنّى لك النجاح !

الأسئلة

الفصل الأوّل: الجبر ($33\frac{1}{3}$ درجة)

حلّ أحد الأسئلة ١–٣.
إذا أجبتَ عن أكثر من سؤال واحد، تُفحص فقط الإجابة الأولى التي في دفترك.

١. البُعد بين المدينة A والمدينة B هو 42 كم.
خرج راكب درّاجة هوائية "أ" من المدينة A باتّجاه المدينة B .
بعد مرور $\frac{1}{2}$ ساعة، خرج من المدينة A راكب درّاجة هوائية "ب" بسرعة 16 $\frac{\text{كم}}{\text{ساعة}}$.
التقى الراكبان، وفوراً بعد ذلك عاد راكب الدرّاجة الهوائية "ب" إلى A ،
وقد وصل إلى A بالضبط عندما وصل راكب الدرّاجة الهوائية "أ" إلى B .
سرعتا راكبَي الدرّاجتين كانتا ثابتتين.
ماذا كانت سرعة راكب الدرّاجة الهوائية "أ"؟

٢. معطاة متوالية هندسية لانهائية أساسها هو $4q^2$ $(0 < q < \frac{1}{2})$.
بين كلّ حدّين في المتوالية المعطاة أدخلوا حدًّا إضافيًا، وتكوّنت متوالية هندسية جديدة كلّ حدودها موجبة.
أ. عبّر بدلالة q عن أساس المتوالية الجديدة.
ب. معطى أنّ مجموع المتوالية الجديدة هو $48q^2$ أضعاف مجموع المتوالية المعطاة.
احسب q .
جـ. بالنسبة لقيمة q التي وجدتَها في البند "ب"، احسب في المتوالية الجديدة النسبة بين الحدّ في المكان الأوّل ومجموع الحدود التي تلي الحدّ الأوّل.

٣. معطاة متوالية حسابية: $2 , 5 , 8 \ldots a_n \ldots$.
برهن بالاستقراء أنّه لكلّ n طبيعي التعبير $2\cdot 3^{a_n} + 3\cdot 2^{a_{n+1}}$ يقسم على 38 بدون باقٍ.

/ يتبع في صفحة 3 /

الفصل الثاني: حساب التفاضل والتكامل، حساب المثلثات ($٦٦\frac{٢}{٣}$ درجة)

حلّ اثنين من الأسئلة ٤–٦ (لكلّ سؤال – $٣٣\frac{١}{٣}$ درجة).

إذا أجبتَ عن أكثر من سؤالين، تُفحص فقط الإجابتان الأوليان اللتان في دفترك.

٤. معطاة الدالة $y = \sin^4 x + \cos^4 x$ ، في المجال $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

أ. اشتقّ وبرهن أنّ مشتقّة الدالة هي $y' = -\sin 4x$.

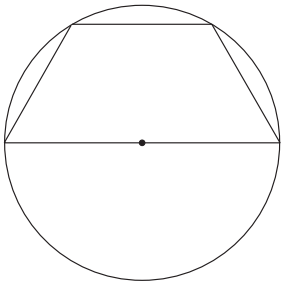
في المجال المعطى جد:

ب. الإحداثيات x للنقاط القصوى للدالة، وحدّد نوعها.

جـ. الإحداثيات x لنقاط التواء الدالة.

د. المجالات التي تكون الدالة فيها مقعّرة باتّجاه الأسفل ∩ .

٥. معطاة دائرة نصف قطرها R .



في هذه الدائرة محصور شبه منحرف متساوي الساقين،
بحيث أنّ القاعدة الكبرى لشبه المنحرف هي قطر
في الدائرة (انظر الرسم).
من بين جميع أشباه المنحرفات المحصورة بهذا النحو،
عبّر بدلالة R عن طول القاعدة الصغرى في شبه المنحرف
الذي مساحته أكبر ما يمكن.

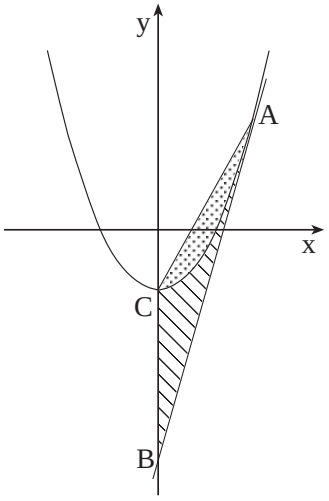
/ يتبع في صفحة 4 /

٦. الرسم البياني للقطع المكافئ $y = x^2 - 1$ يقطع المحور y في النقطة C .

مستقيم يمسّ القطع المكافئ في النقطة A ، ويقطع المحور y في النقطة B (انظر الرسم).

الرسم البياني للقطع المكافئ يقسم المثلث ABC إلى مساحتين.

احسب النسبة بين المساحة العليا (المساحة المنقّطة في الرسم) والمساحة السفلى (المساحة المخطّطة في الرسم).



ב ה צ ל ח ה !
نتمنّى لك النجاح !

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל.
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך התרבות והספורט.
حقوق الطبع محفوظة لدولة إسرائيل.
النسخ أو النشر ممنوعان إلا بإذن من وزارة المعارف والثقافة والرياضة.

נוסחאון מתמטיקה

5-4 יחידות לימוד (החל מקיץ תשי"ן)

لائحة قوانين في الرياضيات

٤-٥ وحدات تعليمية (ابتداءً من صيف ٩٠)

الجبر

التحليل إلى عوامل

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + a^{n-3}b^2 + \ldots + b^{n-1})$$

القانون ذو الحدّين لنيوتن

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \ldots + \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k + \ldots + b^n$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

قوانين فييتي

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ جذرا معادلة تربيعية. x_1, x_2

المتواليات

	متوالية حسابية	متوالية هندسية
الحد الـ n-ي:	$a_n = a_1 + (n-1)\,d$	$a_n = a_1 q^{n-1}$
المجموع:	$S_n = \frac{n}{2}\,[2a_1 + (n-1)\,d]$	$S_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1}$

الأعداد المركّبة

$$z = a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

حاصل ضرب بتمثيل قطبي:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

قانون دي موابر:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

جذور المعادلة $z^n = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ هي:

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right]$$

$$k = 0, 1, \ldots, n-1$$

التوافيق والتباديل

عدد التباديل لـ n عناصر (بدون إعادات):

$$p_n = n!$$

عدد التباديل لـ n عناصر والتي تضم $n_1, n_2, \ldots, n_k$ عناصر متساوية بينها:

$$p_n = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

عدد التباديل لـ k من بين n عناصر (بدون إعادات):

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

عدد التوافيق لـ k من بين n عناصر (بدون إعادات):

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

المتجهات

مستوى عبر أطراف المتجهات $\underline{c}=\overrightarrow{OC}$, $\underline{b}=\overrightarrow{OB}$, $\underline{a}=\overrightarrow{OA}$: $\underline{x}=\underline{a}+t(\underline{b}-\underline{a})+s(\underline{c}-\underline{a})$

حاصل ضرب عددي: $(\underline{x},\underline{y})=\underline{x}\cdot\underline{y}=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3=|\underline{x}|\cdot|\underline{y}|\cdot\cos\alpha$

التعامد: $\underline{x}\cdot\underline{y}=0$

طول المتجه: $|\underline{x}|=\sqrt{\underline{x}\cdot\underline{x}}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$

البُعد بين $z=(z_1,z_2,z_3)$ والمستوى $\underline{a}\cdot\underline{x}+c=0$: $\dfrac{|\underline{a}\cdot\underline{z}+c|}{|\underline{a}|}$

الزاوية بين المستقيم $t\underline{b}+\underline{d}$ والمستوى $\underline{a}\cdot\underline{x}+c=0$: $\sin\beta=\dfrac{|\underline{a}\cdot\underline{b}|}{|\underline{a}|\cdot|\underline{b}|}$

الزاوية بين المستويين $\underline{a}\cdot\underline{x}+c=0$ ، $\underline{b}\cdot\underline{x}+d=0$: $\cos\alpha=\dfrac{|\underline{a}\cdot\underline{b}|}{|\underline{a}|\cdot|\underline{b}|}$

القوى واللوغريثمات

$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a} \qquad a^{\log_a x}=\log_a(a^x)=x$$

حساب المثلثات

المتطابقات

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta \qquad \sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \qquad \operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \qquad \sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

قانون الجيب: $\dfrac{a}{\sin\alpha}=2R$ قانون جيب التمام: $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$

طول قوس ذي α راديانات: $r\alpha$ مساحة قطاع: $\frac{1}{2}r^2\alpha$

الهندسة الفراغية

حجم المخروط والهرم (B - مساحة القاعدة): $V=\dfrac{B\cdot h}{3}$ حجم الكرة: $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$

مساحة غلاف المخروط: $M=\pi R\ell$ مساحة السطح الخارجي للكرة: $P=4\pi R^2$

التحليل (حساب التفاضل والتكامل)

المشتقّات

$$\arcsin'x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \sin'x=\cos x \qquad (x^n)'=nx^{n-1} \qquad (uv)'=u'v+uv'$$

$$\arccos'x=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \cos'x=-\sin x \qquad (a^x)'=a^x\ln a \qquad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{vu'-v'u}{v^2}$$

$$\arctan'x=\frac{1}{1+x^2} \qquad \operatorname{tg}'x=\frac{1}{\cos^2 x} \qquad \log_a'x=\frac{1}{x\ln a}$$

قانون السلسلة: $f'(x)=v'(u)\cdot u'(x)$

التكامل

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$$

قانون شبه المنحرف:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2f(x_1) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(b) \right]$$

دوالّ

دالّة زوجية: $f(x) = f(-x)$ دالّة فردية: $f(-x) = -f(x)$

نقطة الانعطاف: نقطة التحوّل من التحدّب إلى التقعّر دالّة مقعّرة: ∪

الاحصاء والاحتمال

الانحراف المعياري:

$$S = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 f_1 + (x_2 - \bar{x})^2 f_2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2 f_n}{N}}$$

$x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$; التكرارات لـ $f_1, f_2, \ldots\ldots, f_n$

$\bar{x}$ معدّل المعطيات : $f_1 + f_2 + \ldots + f_n = N$

قانون برنولي: الاحتمال لـ k نجاحات في n محاولات في توزيع ذي حدّين مع احتمال p:

$$p_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

جدول التوزيع الطبيعي (0,1) المتراكم

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.500	504	508	512	516	520	524	528	532	536
0.1	0.540	544	548	552	556	560	564	568	571	575
0.2	0.579	583	587	591	595	599	603	606	610	614
0.3	0.618	622	625	629	633	637	641	644	648	652
0.4	0.655	659	663	666	670	674	677	681	684	688
0.5	0.692	695	699	702	705	709	712	716	719	722
0.6	0.726	729	732	736	739	742	745	749	752	755
0.7	0.758	761	764	767	770	773	776	779	782	787
0.8	0.788	791	794	797	800	802	805	809	811	813
0.9	0.816	819	821	824	826	829	832	834	837	839
1.0	0.841	844	846	848	851	853	855	858	860	862
1.1	0.864	866	869	871	873	875	877	879	881	883
1.2	0.885	887	889	891	893	894	896	898	900	902
1.3	0.903	905	907	908	910	911	913	915	916	918
1.4	0.919	921	922	924	925	926	928	929	931	932
1.5	0.933	935	936	937	938	939	941	942	943	944
1.6	0.945	946	947	948	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1.7	0.9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1.8	0.9641	9650	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1.9	0.9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9762	9767
2.0	0.9773	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2.1	0.9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2.2	0.9861	9865	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2.3	0.9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2.4	0.9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2.5	0.9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2.6	0.9954	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2.7	0.9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2.8	0.9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2.9	0.9981	9982	9983	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3.0	0.9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990

الهندسة التحليلية

الخط المستقيم

معادلة مستقيم يمرّ عبر النقطة (x_1,y_1) وميله m : $y - y_1 = m(x - x_1)$

قانون للزاوية α التي بين المستقيمين $y = m_1x + n_1$, $y = m_2x + n_2$: $tg\alpha = \left[\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}\right]$

تعامد المستقيمين $y = m_1x + n_1$, $y = m_2x + n_2$: $m_1 \cdot m_2 = -1$

بُعد النقطة $(x_o ; y_o)$ عن المستقيم $Ax + By + C = 0$: $d = \pm\frac{Ax_o + By_o + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

النقطة التي تقسم القطعة AB بنسبة $k : \ell$ $(A(x_1,y_1) ; B(x_2,y_2))$: $\left(\frac{\ell x_1 + kx_2}{k + \ell} , \frac{\ell y_1 + ky_2}{k + \ell}\right)$

الدائرة

معادلة مماس الدائرة $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ في النقطة $(x_o ; y_o)$:

$$(x_o - a) \cdot (x - a) + (y_o - b) \cdot (y - b) = R^2$$

القطع الزائد $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$:

خطوط التقارب: $y = \pm\frac{b}{a}x$

بُعد البؤرة عن نقطة الأصل: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

المماس للقطع الزائد في النقطة $(x_o ; y_o)$: $\frac{xx_o}{a^2} - \frac{yy_o}{b^2} = 1$

الشرط بأن يمسّ المستقيم $y = mx + n$ القطع الزائد: $n^2 = m^2a^2 - b^2$

القطع المكافئ $y^2 = 2px$:

مماس القطع المكافئ في النقطة $(x_o ; y_o)$: $yy_o = p(x + x_o)$

الشرط بأن يمسّ المستقيم $y = mx + n$ القطع المكافئ: $n = \frac{p}{2m}$