

מבחן מתכונת מס' 21 + פתרון מלא
4 יח"ל – שאלון 035805 / 035482

מתוך סדרת ספרי מבחני המתכונת ל- 3, 4 ו- 5 יח"ל
www.mishbetzet.co.il הוצאת מִשְׁבֶּצֶת

- 98 -

מבחנים לשאלון 035805

מבחן מס' 21

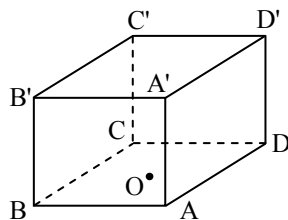
פרק ראשון – סדרות, טריגונומטריה במרחב

($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על אחת מהשאלות (1) – (2).

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

- (1) בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת סכום שלושת האיברים הראשונים הוא 61. אם מחליפים את הסימנים של האיברים העומדים במקומות הזוגיים מתקבלת סדרה הנדסית אינסופית חדשה שסכומה קטן פי 9 מסכום איברי הסדרה המקורית.
- (א) חשב את המנה של הסדרה המקורית.
- (ב) חשב את סכום כל איברי הסדרה המקורית.



- (2) נתונה התיבה $ABCD A'B'C'D'$.
- בסיס התיבה הוא ריבוע, שאורך צלעו a ס"מ.
- גובה התיבה שווה ל- $\frac{1}{3}a$ ס"מ.
- O היא נקודת מפגש האלכסונים בבסיס ABCD.
- חשב את הזווית שבין בסיס התיבה ABCD לבין $D'O$.

פרק שני – בעיות גדילה ודעיכה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות, פונקציות חזקה (עם מעריך רציונאלי), פונקציות מעריכיות ופונקציות לוגריתמיות
($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות (3) – (5) (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).
שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

(3) לפונקציה $f(x) = (a - x)\sqrt[4]{x^3}$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x = 3$.

(א) מצא את a .

(ב) חקור את הפונקציה ומצא את:

(i) תחום ההגדרה של הפונקציה.

(ii) שיעורי נקודות הקיצון.

(iii) תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

(iv) שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

(ג) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(ד) $g(x)$ היא פונקציה שמקיימת $g'(x) = f(x)$ בתחום $x > 0$.

(i) מצא את שיעור ה- x של נקודת הקיצון הפנימית של $g(x)$

וקבע את סוגה.

(ii) מצא את תחומי העלייה והירידה של $g(x)$.

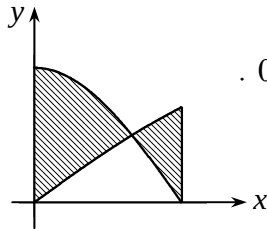
(iii) מצא את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$

בנקודה שבה $x = 16$ שעל גרף הפונקציה.

(4) מצא את נקודות המקסימום והמינימום המוחלטים

של הפונקציה $f(x) = 2^{3x+1} - 9 \cdot 2^{2x} + 3 \cdot 2^{x+2}$

בתחום $-1 \leq x \leq 1$.



(5) בסרטוט מתוארים גרפים של שתי פונקציות:

$$f(x) = \sin x \text{ ו- } g(x) = \cos \frac{ax}{3} \text{ בתחום } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}.$$

שיעור ה- y של נקודת החיתוך

של שתי הפונקציות הוא $\frac{1}{2}$.

(א) מצא את a ($0 < a < 10$).

(ב) חשב את השטח המוגבל על-ידי הגרפים של

הפונקציות בתחום $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ (השטח המקווקו בסרטוט).

תשובות סופיות

(1) (א) $q = 0.8$ (ב) $S_{\text{מקורית}} = 125$

(2) 25.2394°

(3) (א) $a = 7$

(ב) (i) $x \geq 0$

(ii) $\min(0,0)$, $\max(3, 4\sqrt[4]{27})$

(iii) תחום עלייה: $0 \leq x < 3$,

תחום ירידה: $x > 3$.

(iv) $(0,0)$, $(7,0)$

(ג) ראה סרטוט משמאל.

(ד) (i) $x_{\max} = 7$

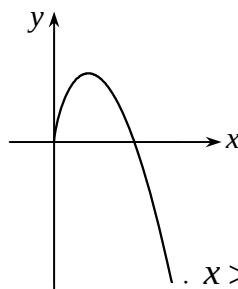
(ii) תחום עלייה: $0 < x < 7$, תחום ירידה: $x > 7$.

(iii) $m = -72$

(4) $(1,4)$ מינימום מוחלט , $(-1,4)$ מינימום מוחלט , $(0,5)$ מקסימום מוחלט

(5) (א) $a = 6$

(ב) $S \approx 0.39$ יחידת שטח



פתרון מבחן מס' 21 (ספר מבחנים – שאלון 035805)

(1) (א) הסדרה המקורית: $a_1, a_2, a_3, \dots$ (מנתה q).

הסדרה עם הסימנים המתחלפים: $a_1, -a_2, a_3, -a_4, \dots$

(מנתה $-q$).

$$a_1 + a_2 + a_3 = 61 \Rightarrow a_1(1 + q + q^2) = 61 \quad \text{נתון:}$$

$$9 \cdot \frac{a_1}{1+q} = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow 9 - 9q = 1 + q \Rightarrow q = 0.8$$

$$a_1(1 + 0.8 + 0.8^2) = 61 \Rightarrow a_1 = \frac{61}{2.44} = 25 \quad \text{(ב)}$$

$$S_{\text{מקורית}} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{25}{1-0.8} = 125$$

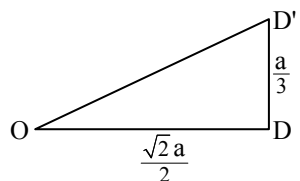
(2) הזווית המבוקשת היא $\angle D'OD$.

לפי משפט פיתגורס ב- $\triangle ABD$: $BD^2 = AB^2 + AD^2$

$$BD^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow BD^2 = 2a^2 \Rightarrow BD = \sqrt{2}a \text{ ס"מ}$$

$$DO = \frac{BD}{2} = \frac{\sqrt{2}a}{2} \text{ ס"מ} \quad \text{אלכסונים בריבוע חוצים זה את זה, לכן:}$$

ב- $\triangle D'OD$:



$$\tan \angle D'OD = \frac{\frac{a}{3}}{\frac{\sqrt{2}a}{2}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\angle D'OD = 25.24^\circ$$

(3) (א) נתון: $f'(3) = 0$.

$$f'(x) = -1 \cdot x^{\frac{3}{4}} + (a - x) \cdot \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}} = x^{-\frac{1}{4}} \left(-x + \frac{3}{4}a - \frac{3}{4}x \right)$$

$$f'(x) = x^{-\frac{1}{4}} \left(-1\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}a \right) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{4}}(7x - 3a)$$

$$f'(3) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{4} \cdot 3^{-\frac{1}{4}}(7 \cdot 3 - 3a) = 0$$

$$21 - 3a = 0 \Rightarrow a = 7$$

$$f(x) = (7 - x)\sqrt[4]{x^3} = (7 - x) \cdot x^{\frac{3}{4}} \quad (i) \quad (b)$$

$$x^3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \quad \text{תחום הגדרה:}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{4}}(7x - 21) \quad (iii) + (ii)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 7x - 21 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$f(3) = 4 \cdot \sqrt[4]{3^3} = 4 \cdot \sqrt[4]{27} \Rightarrow (3, 4 \cdot \sqrt[4]{27})$$

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow (0, 0) \quad \text{נקודת הקצה:}$$

x	x = 0	0 < x < 3	x = 3	x > 3
f'(x)		-	0	+
f(x)		↘	min	↗

$$f'(1) = -\frac{1}{4} \cdot (7 - 21) > 0, \quad f'(4) = -\frac{1}{4} \cdot 4^{-\frac{1}{4}} \cdot (28 - 21) < 0$$

$$\text{לכן: } \max(3, 4 \cdot \sqrt[4]{27}), \min(0, 0)$$

$$\text{תחום עלייה: } 0 \leq x < 3, \quad \text{תחום ירידה: } x > 3$$

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow (0, 0) \quad (iv)$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow (7 - x) \cdot x^{\frac{3}{4}} = 0$$

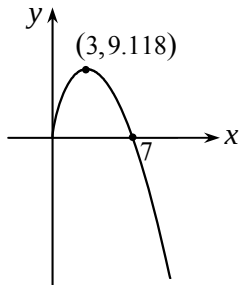
$$7 - x = 0 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow (7, 0)$$

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow (0, 0)$$

תשובה: שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים:

$$(0, 0), (7, 0)$$

המשך בעמוד הבא <<<



(ג) ראו סרטוט משמאל.

(ד) (i) + (ii)

$$g'(x) = f(x) \text{ מתאפסת}$$

כאשר $x = 7$ (בתחום $x > 0$)

$$g'(x) > 0 \text{ עבור } 0 < x < 7$$

$$\text{ו- } g'(x) < 0 \text{ עבור } x > 7,$$

לכן $g(x)$ עולה עבור $0 < x < 7$ ויורדת עבור $x > 7$,

כלומר ל- $g(x)$ יש נקודת מקסימום בנקודה שבה $x = 7$.

(iii) יש למצוא את $g'(16)$.

$$g'(16) = f(16) = (7 - 16) \cdot \sqrt[4]{16^3} = -9 \cdot 8 = -72$$

$$f(-1) = 2^{-2} - 9 \cdot 2^{-2} + 3 \cdot 2^1 = \frac{1}{4} - \frac{9}{4} + 6 = 4 \Rightarrow (-1, 4) \quad (4)$$

$$f(1) = 2^4 - 9 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 = 16 - 36 + 24 = 4 \Rightarrow (1, 4)$$

$$f'(x) = 2^{3x+1} \cdot 3 \cdot \ln 2 - 9 \cdot 2^{2x} \cdot 2 \cdot \ln 2 + 3 \cdot 2^{x+2} \cdot 1 \cdot \ln 2$$

$$f'(x) = 2^x \cdot 3 \ln 2 (2^{2x+1} - 6 \cdot 2^x + 2^2)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2^x = 0 \text{ או } 2 \cdot 2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 4 = 0$$

למשוואה $2^x = 0$ אין פתרון, לכן נישאר עם $2 \cdot 2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 4 = 0$.

$$2t^2 - 6t + 4 = 0 \quad / : 2 \quad \text{נסמן: } 2^{2x} = t \text{ ונקבל משוואה ריבועית:}$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow (t-2)(t-1) = 0 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = 2$$

$$2^x = 1 \Rightarrow 2^x = 2^0 \Rightarrow x = 0$$

$$f(0) = 2^1 - 9 \cdot 2^0 + 3 \cdot 2^2 = 5 \Rightarrow (0, 5)$$

$$2^x = 2 \Rightarrow 2^x = 2^1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (1, 4)$$

ואז: $(1, 4)$ מינימום, $(-1, 4)$ מינימום, $(0, 5)$ מקסימום מוחלט.

$$f(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{ בתחום}) \quad (5) \quad (א)$$

$$g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \cos \frac{a \cdot \frac{\pi}{6}}{3} \quad \text{ואז:}$$

$$\frac{1}{2} = \cos \frac{\pi a}{18} \Rightarrow \frac{\pi a}{18} = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k \Rightarrow a = \pm 6 + 36k$$

בתחום $0 < a < 10$ נקבל: $a = 6$.

$$f(0) = \sin 0 = 0 \quad (ב)$$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (\sin x - \cos 2x) dx = \\ &= \left(\frac{\sin 2x}{2} + \cos x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \left(-\cos x - \frac{\sin 2x}{2} \right) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - (0 + 1) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \\ &= 0.39 \text{ יחידות שטח} \end{aligned}$$

מתמטיקה לחט"ב – ספרי לימוד

מתמטיקה לכיתה ז'

מתמטיקה לכיתה ח'

מתמטיקה לכיתה ט'

ספרי הכנה במתמטיקה לחטיבה ולתיכון

- ♦ הכנה במתמטיקה לכיתה ז' – למסיימי כיתה ו'
- ♦ הכנה במתמטיקה לכיתה ט' – למסיימי כיתה ח'
- ♦ הכנה במתמטיקה לכיתה ז' – למסיימי כיתה ח'
- ♦ הכנה במתמטיקה לכיתה י' – למסיימי כיתה ט'

מתמטיקה לתיכון – ספרי לימוד

3 יחידות לימוד – כיתה י', כיתה י"א, כיתה י"ב

4 יחידות לימוד – כיתה י', כיתה י"א, כיתה י"ב

5 יחידות לימוד – כיתה י', כיתה י"א, כיתה י"ב

ספרי מבחני מתכונת (מיקוד לבגרות)

3 יחידות לימוד – מבחני מתכונת במתמטיקה – כל השאלונים

4 יחידות לימוד – מבחני מתכונת במתמטיקה – כל השאלונים

5 יחידות לימוד – מבחני מתכונת במתמטיקה – כל השאלונים

מידע על הספרים

הספרים **חוסכים** עשרות שיעורים פרטיים ומקנים לתלמיד הרגשת בטחון ומעורבות בנעשה בכיתה.

הספרים מכילים הסברים מפורטים, דוגמאות רבות ומאות שאלות לעבודה עצמית.

בספרים הושקע מאמץ רב והושם דגש על דרכי הוראה בהירות וידידותיות לתלמיד ולמורה.

אתר האינטרנט של משבצת

דפי עבודה ■ מבחנים ■ מדריכים למורה ■ ספרים דיגיטליים ■ תוכנות ליצירת דפי עבודה
פעילויות מתוקשבות ■ חומרי לימוד ■ תמיכה ■ מכירה – רשימת חנויות, מפצים וקנייה און ליין

האתר: www.mishbetzet.co.il