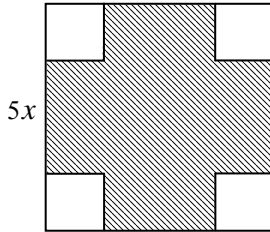


امتحان رقم 7

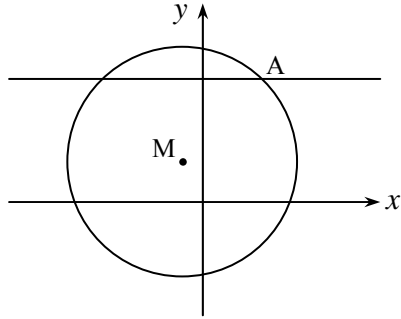
أجب عن أربعة من الأسئلة (1) – (6) (لكل سؤال 25 درجة).
انتبه! إذا أجبت عن أكثر من أربعة أسئلة، تُفحص فقط الإجابات الأربعة الأولى التي في دفترتك.

الجبر

- (1) اشترت خبيزة تجميل 80 علبة كُريم بسعر x شاقל للعلبة الواحدة. باعت الخبيزة 40 علبة بنفس السعر، x شاقل للعلبة. 30 علبة باعتها بربح بنسبة 16%، 10 علب باعتها بربح بنسبة 8%. باعت الخبيزة كلّ العلب بسعر إجماليّ مقداره 6,848 شاقلاً. جدوا السعر x الذي دفعته الخبيزة مقابل علبة كُريم واحدة.



- (2) حديقة على شكل مربع طول ضلعه $5x$. في كلّ واحدة من أربع زوايا الحديقة توجد قسيمة ورود. شكل كلّ قسيمة هو مربع صغير طول ضلعه يساوي خُمس طول ضلع الحديقة (انظروا الرسم). في المساحة المتبقية (المساحة المخططة في الرسم) يوجد عُشب أخضر.
(أ) عبّروا بدلالة x عن مساحة العشب الأخضر.
(ب) حسب تخطيط جديد للحديقة، طول ضلع الحديقة سيكون بـ 20%، وطول ضلع كلّ واحدة من قسائم الورد لن يتغير. عبّروا بدلالة x عن مساحة العشب الأخضر حسب التخطيط الجديد.
(ج) في التخطيط الجديد، مساحة العشب الأخضر أكبر بـ 44 م² من مساحة العشب الأخضر في البند (أ). احسبوا x .



(3) النقطة M هي مركز الدائرة:

$$(x+1)^2 + (y-4)^2 = 25$$

النقطة A هي نقطة تقاطع

المستقيم $y = 8$ مع الدائرة (انظروا الرسم).

معلوم أن النقطة A تقع في الربع الأول.

(أ) جدوا إحداثيات النقطة A.

(ب) جدوا ميل المستقيم MA.

(ج) جدوا معادلة المماس للدائرة في النقطة A.

(د) عبر النقطة M مرّوا عموداً على المستقيم $y = 8$.

يقطع العمود المستقيم في النقطة B. جدوا مساحة المثلث AMB.

حساب التفاضل والتكامل

(4) معطاة الدالة $y = \frac{4}{x} + x - 2$.

(أ) اكتبوا مجال تعريف الدالة.

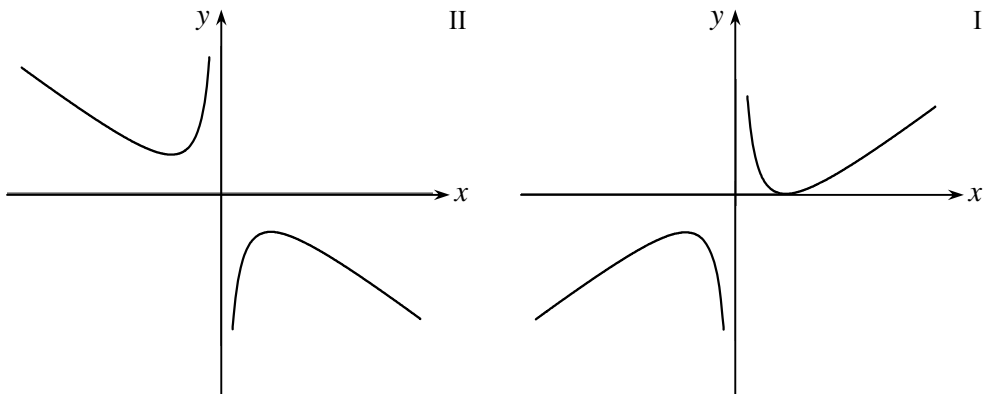
(ب) جدوا نقاط تقاطع الرسم البياني للدالة مع المحورين (إذا وجدت كهذه).

(ج) جدوا النقاط القصوى للدالة وحددوا نوعها.

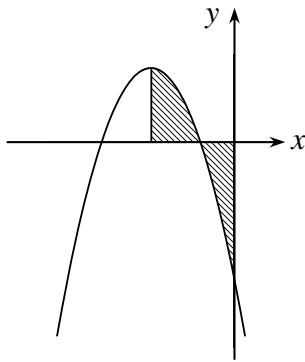
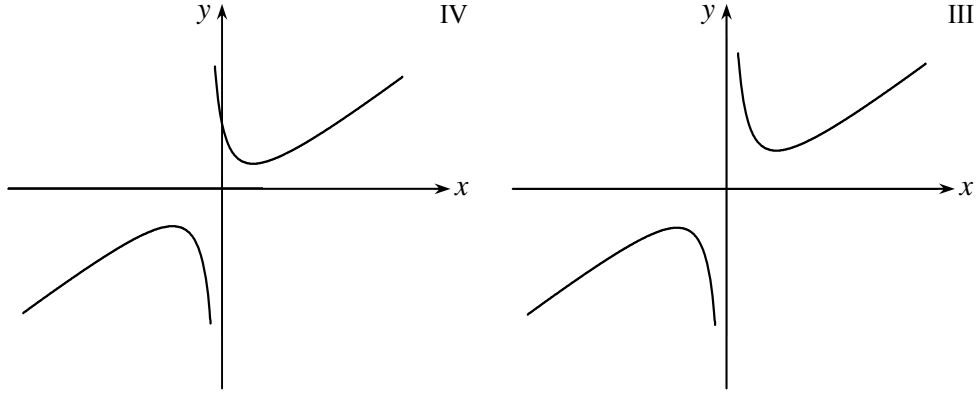
(د) جدوا مجالات تنازل وتساعد الدالة.

(هـ) أمامكم أربعة رسوم بيانية I ، II ، III ، IV.

أي رسم من بينها يصف الدالة المعطاة؟ علّلوا.



يتبع في الصفحة التالية <<<



(5) معطاة الدالة: $y = -x^2 - 6x - 5$

(انظروا الرسم).

(أ) جدوا إحداثيات نقطة النهاية العظمى للدالة.

(ب) عبر نقطة النهاية العظمى للدالة

مَرَّروا عمودًا على المحور x (انظروا الرسم).

احسبوا المساحة المحصورة بين الرسم البياني للدالة،

العمود والمحورين (المساحة المخططة في الرسم).

(6) (أ) معطاة الدالة: $x(y + 2) = 9$

عبّروا عن y بدلالة x .

(ب) من بين كلّ الأعداد الموجبة x و- y التي تُحقِّق: $x(y + 2) = 9$ ،

جدوا العددين اللذين بالنسبة لهما المجموع $x + y$ هو أصغر ما يمكن.

(ج) جدوا أصغر قيمة ممكنة للمجموع $x + y$.

أجوبة نهائية

(1) 80 شاقلاً.

(أ) (2) $S = 21x^2$

(ب) $S = 32x^2$

(ج) متران $x =$

(أ) (3) $A(2,8)$

(ب) $m = \frac{4}{3}$

(ج) $y = -\frac{3}{4}x + 9\frac{1}{2}$

(د) 6 وحدات مساحة.

(أ) (4) $x \neq 0$

(ب) لا يوجد.

(ج) $\max(-2, -6)$ ، $\min(2, 2)$

(د) مجالاً التصاعد: $x > 2$ أو $x < -2$ مجالاً التنازل: $0 < x < 2$ أو $-2 < x < 0$

(هـ) الرسم البياني III

(أ) (5) $(-3, 4)$

(ب) $S = 7\frac{2}{3}$ وحدات مساحة

(أ) (6) $y = \frac{9}{x} - 2$ (ب) $x = 3$ ، $y = 1$ (ج) 4

פתרון מלא למבחן מתכונת 7 מתוך אתר האינטרנט

www.mishbetzet.co.il – **שבצת**

02.04.15

- 3070 -

פתרונות למבחנים

פתרון מבחן מס' 7 (ספר מבחנים – שאלון 035803)

(1) מחיר הקנייה של קופסת קרם הוא x ש"ח, לכן:

מחיר המכירה עם רווח של 16% : $1.16x$ ש"ח = $\frac{100\% + 16\%}{100\%} \cdot x$

מחיר המכירה עם רווח של 8% : $1.08x$ ש"ח = $\frac{100\% + 8\%}{100\%} \cdot x$

על סמך נתוני התרגיל, נרכיב את המשוואה:

$$40x + 30 \cdot 1.16x + 10 \cdot 1.08x = 6,848$$

$$40x + 34.8x + 10.8x = 6,848$$

$$85.6x = 6,848$$

$$x = 80$$

תשובה: הקוסמטיקאית שילמה 80 ש"ח עבור קופסת קרם אחת.

(2) אם אורך צלע הריבוע הוא $5x$,

אז אורך הצלע של כל ריבוע קטן של חלקת פרחים

$$\text{הוא } \frac{1}{5} \cdot 5x = x$$

(א) שטח הדשא:

$$S_{\text{דשא}} = S_{\text{גינה}} - 4 \cdot S_{\text{חלקת פרחים}} =$$

$$= (5x)^2 - 4 \cdot (x)^2 =$$

$$= 25x^2 - 4x^2 = 21x^2$$

(ב) אורך צלע הגינה לפי התכנית החדשה:

$$a = \frac{100\% + 20\%}{100\%} \cdot 5x = 1.2 \cdot 5x = 6x$$

$$S_{\text{דשא}} = (6x)^2 - 4 \cdot (x)^2 = 36x^2 - 4x^2 = 32x^2$$

המשך בעמוד הבא <<<

(ג) על סמך הנתון של הפרש השטחים של הדשא בתכנית הראשונה ובתכנית השנייה, ניתן להרכיב את המשוואה:

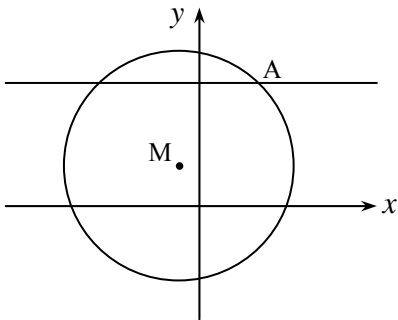
$$\underbrace{32x^2}_{\text{שטח דשא לפי תוכנית חדשה}} - \underbrace{21x^2}_{\text{שטח דשא לפי תוכנית ראשונה}} = 44$$

$$11x^2 = 44$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

הפתרון $x = -2$ נפסל, כי אורך הוא גודל חיובי, לכן: 2 מ' $x =$.



(3) (א) שיעור ה- y של הנקודה A

הוא 8 והיא נמצאת על המעגל, לכן:

$$(x_A + 1)^2 + (8 - 4)^2 = 25$$

$$(x_A + 1)^2 + 4^2 = 25$$

$$(x_A + 1)^2 = 9$$

$$x_A + 1 = 3 \quad \text{או} \quad x_A + 1 = -3$$

$$x_A = 2 \quad \quad \quad x_A = -4$$

נתון כי הנקודה A נמצאת ברביע הראשון, כלומר, $x_A > 0$, לכן: $x_A = 2$ ומכאן: A(2, 8).

(ב) לפי משוואת המעגל: $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 25$

אפשר למצוא כי שיעורי מרכז המעגל M(-1, 4) ורדיוסו 5.

$$m_{AM} = \frac{y_A - y_M}{x_A - x_M} = \frac{8 - 4}{2 - (-1)} = \frac{4}{3} \quad \text{לכן: } A(2, 8), M(-1, 4)$$

(ג) רדיוס מעגל מאונך למשיק בנקודת ההשקה, לכן מכפלת השיפועים של הרדיוס לנקודה A והמשיק שווה ל-(-1).

$$m_{\text{משיק}} \cdot m_{MA} = -1$$

$$m_{\text{משיק}} \cdot \frac{4}{3} = -1 \Rightarrow m_{\text{משיק}} = -\frac{3}{4}$$

המשך בעמוד הבא <<<

משוואת המשיק למעגל בנקודה $A(2,8)$ היא:

$$y - y_A = m_{\text{משיק}}(x - x_A)$$

$$y - 8 = -\frac{3}{4}(x - 2)$$

$$y - 8 = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$$

$$y = -\frac{3}{4}x + 9\frac{1}{2}$$

(ד) MB מקביל לציר ה- y , לכן $x_B = x_M = -1$.

BA מקביל לציר ה- x , לכן $y_B = y_A = 8$.

$$\text{מכאן: } S_{\Delta ABM} = \frac{AB \cdot MB}{2}$$

$$AB = x_A - x_B = 2 - (-1) = 3 \text{ יחידות אורך}$$

$$MB = y_B - y_M = 8 - 4 = 4 \text{ יחידות אורך}$$

$$\text{מכאן: } S_{\Delta ABM} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6 \text{ יחידות שטח}$$

$$y = \frac{4}{x} + x - 2 \quad (4)$$

(א) תחום הגדרה: $x \neq 0$.

(ב) לגרף הפונקציה אין נקודת חיתוך עם ציר ה- y ,

מכיוון ש- $x = 0$ אינו בתחום ההגדרה.

נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x : $y = 0$.

$$\frac{4}{x} + x - 2 = 0 \quad / \cdot x \neq 0$$

$$x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2}$$

אי אפשר להוציא שורש ממספר שלילי, לכן אין פתרונות ממשיים

למשוואה זו, לכן לגרף הפונקציה אין נקודות חיתוך עם ציר ה- x .

מסקנה: לגרף הפונקציה אין נקודות חיתוך עם הצירים.

המשך בעמוד הבא <<<

$$y' = \left(\frac{4}{x} + x - 2\right)' = -\frac{4}{x^2} + 1 \quad (ג)$$

$$y' = 0 \Rightarrow -\frac{4}{x^2} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{4}{x^2} = 1$$

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2$$

$$x_1 = 2 \Rightarrow y = \frac{4}{2} + 2 - 2 = 2$$

$$x_2 = -2 \Rightarrow y = \frac{4}{-2} - 2 - 2 = -6$$

נקודות חשודות לקיצון: $(-2, -6)$, $(2, 2)$.

נבדוק האם באמת נקודות אלו הן נקודות קיצון, ונמצא את סוגן:

x	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$f'(x)$	+	0	-	נקודת אי-הגדרה	-	0	+
$f(x)$	↗	max	↘		↘	min	↗

$$f'(-3) = -\frac{4}{9} + 1 > 0$$

$$f'(-1) = -\frac{4}{1} + 1 < 0$$

$$f'(1) = -\frac{4}{1} + 1 < 0$$

$$f'(3) = -\frac{4}{9} + 1 > 0$$

מהטבלה: $(2, 2)$ נקודת מינימום, $(-2, -6)$ נקודת מקסימום.

(ד) מהטבלה רואים כי:

תחומי עלייה: $x < -2$, $x > 2$

תחומי ירידה: $-2 < x < 0$, $0 < x < 2$

(ה) גרף I אינו מתאים, כי, למשל, שיעור ה- y של נקודת המינימום

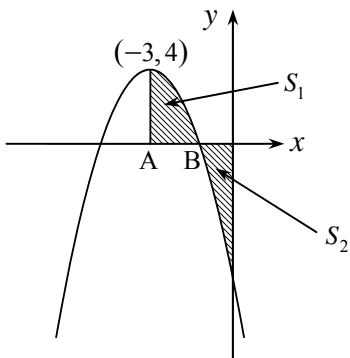
הוא 0 ולא 2.

גרף II אינו מתאים, כי, למשל, ב- $x = 2$ יש נקודת מקסימום

ולא מינימום.

גרף IV אינו מתאים, כי יש נקודת חיתוך עם ציר ה- y .

לכן, הגרף המתאר את הפונקציה הנתונה הוא גרף III.



$$y = -x^2 - 6x - 5 \quad (5)$$

(א) נמצא את שיעורי נקודת המקסימום

של הפרבולה:

$$x_{\text{קדקוד}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{-2} = -3$$

$$y_{\text{קדקוד}} = -(-3)^2 - 6 \cdot (-3) - 5 = -9 + 18 - 5 = 4$$

שיעורי נקודת המקסימום: $(-3, 4)$.

(ב) יש לחשב את השטח המקווקו. נשים לב שחלק מהשטח נמצא מעל ציר ה- x

וחלקו נמצא מתחת לציר ה- x . לכן, יש לחלק את השטח המבוקש

לשני חלקים.

נמצא תחילה את נקודות החיתוך של הגרף עם ציר ה- x :

$$y = 0 \Rightarrow -x^2 - 6x - 5 = 0 \quad / \cdot (-1)$$

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{-6 \pm 4}{2} \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -5$$

נקודה B, נקודת החיתוך הימנית עם ציר ה- x , מקיימת: $x_B = -1$,

לכן:

$$S_1 = \int_{-3}^{-1} (-x^2 - 6x - 5) dx = \left(-\frac{x^3}{3} - 3x^2 - 5x \right) \Big|_{-3}^{-1} =$$

$$= -\frac{(-1)^3}{3} - 3(-1)^2 - 5(-1) - \left[-\frac{(-3)^3}{3} - 3(-3)^2 - 5(-3) \right] =$$

$$= \frac{1}{3} - 3 + 5 - (9 - 27 + 15) = 2\frac{1}{3} + 3 = 5\frac{1}{3}$$

השטח S_2 נמצא מתחת לציר ה- x , לכן:

$$S_2 = -\int_{-1}^0 (-x^2 - 6x - 5) dx$$

המשך בעמוד הבא <<<

נשתמש בפונקציה הקדומה שמצאנו בחישוב של S_1 ונקבל:

$$S_2 = -\left(-\frac{x^3}{3} - 3x^2 - 5x\right)\Big|_{-1}^0 = \frac{x^3}{3} + 3x^2 + 5x\Big|_{-1}^0 =$$

$$= 0 - \left[\frac{(-1)^3}{3} + 3(-1)^2 + 5(-1)\right] =$$

$$= 0 - \left(-\frac{1}{3} + 3 - 5\right) = 2\frac{1}{3} \text{ יחידות שטח}$$

לכן, השטח המבוקש הוא: $7\frac{2}{3}$ יחידות שטח $S = S_1 + S_2 = 5\frac{1}{3} + 2\frac{1}{3}$

$$x(y + 2) = 9 \quad (6)$$

$$y + 2 = \frac{9}{x} \Rightarrow y = \frac{9}{x} - 2 \quad (\text{א})$$

(ב) פונקציית המטרה היא: $F = x + y$, ויש למצוא את המינימום שלה.

$$F(x) = x + y = x + \frac{9}{x} - 2$$

$$F'(x) = \left(x + \frac{9}{x} - 2\right)' = 1 - \frac{9}{x^2}$$

$$F'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{9}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{9}{x^2} = 1 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

נתון שהמספרים x ו- y הם חיוביים, לכן הפתרון $x = -3$ נפסל.

$$x = 3 \Rightarrow y = \frac{9}{3} - 2 = 1$$

מכאן, הנקודה החשודה לקיצון היא $(3, 1)$.

x	x = 0	0 < x < 3	x = 3	x > 3
f'(x)	נקודת אי-הגדרה	-	0	+
f(x)		↘	min	↗

$$F'(1) = 1 - \frac{9}{1^2} < 0$$

$$F'(4) = 1 - \frac{9}{4^2} > 0$$

לכן, הסכום $x + y$ מקבל ערך מינימלי בנקודה $(3, 1)$,

כלומר: $x = 3, y = 1$.

$$F_{\min} = F(x = 3) = 3 + \frac{9}{3} - 2 = 4 \quad (\text{ג})$$

(ניתן גם לחשב: $F_{\min} = (x + y)_{\min} = 3 + 1 = 4$.)

תשובה: הערך המינימלי של הסכום $x + y$ לפי תנאי התרגיל הוא 4.

מתמטיקה לחט"ב – ספרי לימוד

מתמטיקה לכיתה ז'
מתמטיקה לכיתה ח'
מתמטיקה לכיתה ט'

ספרי הכנה במתמטיקה לחטיבה ולתיכון

♦ הכנה במתמטיקה לכיתה ז' – למסיימי כיתה ו'
♦ הכנה במתמטיקה לכיתה ח' – למסיימי כיתה ז'
♦ הכנה במתמטיקה לכיתה ט' – למסיימי כיתה ח'
♦ הכנה במתמטיקה לכיתה י' – למסיימי כיתה ט'

מתמטיקה לתיכון – ספרי לימוד

3 יחידות לימוד – כיתה י', כיתה י"א, כיתה י"ב
4 יחידות לימוד – כיתה י', כיתה י"א, כיתה י"ב
5 יחידות לימוד – כיתה י', כיתה י"א, כיתה י"ב

ספרי מבחני מתכונת (מיקוד לבגרות)

3 יחידות לימוד - מבחני מתכונת במתמטיקה - כל השאלונים
4 יחידות לימוד - מבחני מתכונת במתמטיקה - כל השאלונים
5 יחידות לימוד - מבחני מתכונת במתמטיקה - כל השאלונים

מידע על הספרים

הספרים **חוסכים** עשרות שיעורים פרטיים ומקנים לתלמיד הרגשת בטחון ומעורבות בנעשה בכיתה.
הספרים מכילים הסברים מפורטים, דוגמאות רבות ומאות שאלות לעבודה עצמית.
בספרים הושקע מאמץ רב והושם דגש על דרכי הוראה בהירות וידידותיות לתלמיד ולמורה.

אתר האינטרנט של משבצת

דפי עבודה ■ מבחנים ■ מדריכים למורה ■ ספרים דיגיטליים ■ תוכנות ליצירת דפי עבודה
פעילויות מתוקשבות ■ חומרי לימוד ■ תמיכה ■ מכירה – רשימת חנויות, מפיצים וקנייה און ליין
האתר: www.mishbetzet.co.il