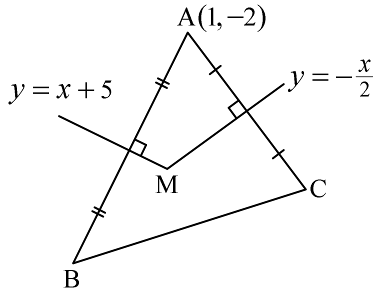
פתרון מבחן מס' 28 (ספר לימוד – שאלון 035807)

(1) (א) מרכז המעגל החוסם את המשולש נמצא בנקודת חיתוך האנכים האמצעיים לצלעות המשולש :



$$\begin{cases} y = x+5 \\ y = -\frac{x}{2} \end{cases} \Rightarrow \quad x+5 = -\frac{x}{2}$$

$$\frac{3x}{2} = -5 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{10}{3} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{M}\left(-\frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

$$\mathrm{R} = \mathrm{MA} = \sqrt{(x_\mathrm{A} - x_\mathrm{M})^2 + (y_\mathrm{A} - y_\mathrm{M})^2} =$$

$$= \sqrt{\left(1 + \frac{10}{3}\right)^2 + \left(-2 - \frac{5}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{169}{9} + \frac{121}{9}} = \sqrt{\frac{290}{9}}$$

משוואת המעגל :
$$\left(x + \frac{10}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{290}{9}$$

(ב) מכפלת שיפועים של ישרים מאונכים שווה ל- -1 , לכן :

$$\mathrm{m}_{\mathrm{AB}} \cdot 1 = -1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{m}_{\mathrm{AB}} = -1$$

משוואת AB :
$$y + 2 = -1 \cdot (x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = -x - 1$$

הנקודה B היא נקודת החיתוך של AB עם המעגל :

$$\left(x + \frac{10}{3}\right)^2 + \left(-x - 1 - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{290}{9} \quad \Rightarrow \quad \left(x + \frac{10}{3}\right)^2 + \left(x + \frac{8}{3}\right)^2 = \frac{290}{9}$$

$$x^2 + \frac{20}{3}x + \frac{100}{9} + x^2 + \frac{16}{3}x + \frac{64}{9} = \frac{290}{9}$$

$$2x^2 + 12x - 14 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 6x - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-6 \pm 8}{2}$$

$$x_1 = -7 \ , \ x_2 = 1$$

הפתרון $x_2 = 1$ מתאים לנקודה A , לכן :

$$x_\mathrm{B} = -7 \quad \Rightarrow \quad y_\mathrm{B} = 7 - 1 = 6 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{B}(-7,6)$$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

$\mathrm{m}_{\mathrm{AC}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1 \;\Rightarrow\; \mathrm{m}_{\mathrm{AC}}=2$

משוואת AC : $y+2=2(x-1) \;\Rightarrow\; y=2x-4$

הנקודה C היא נקודת החיתוך של AC עם המעגל:

$\left(x+\frac{10}{3}\right)^2+\left(2x-4-\frac{5}{3}\right)^2=\frac{290}{9} \;\Rightarrow\; \left(x+\frac{10}{3}\right)^2+\left(2x-\frac{17}{3}\right)^2=\frac{290}{9}$

$5x^2-16x+11=0 \;\Rightarrow\; x_{1,2}=\frac{16\pm 6}{10} \;\Rightarrow\; x_1=1\ ,\ x_2=\frac{11}{5}$

הפתרון $x_1=1$ מתאים לנקודה A , לכן:

$x_{\mathrm{C}}=\frac{11}{5} \;\Rightarrow\; y_{\mathrm{C}}=2\cdot\frac{11}{5}-4=\frac{2}{5} \;\Rightarrow\; \mathrm{C}\left(\frac{11}{5},\frac{2}{5}\right)$

$\mathrm{m}_{\mathrm{BC}}=\frac{y_{\mathrm{B}}-y_{\mathrm{C}}}{x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{C}}}=\frac{6-\frac{2}{5}}{-7-\frac{11}{5}}=-\frac{14}{23}$

משוואת BC : $y-6=-\frac{14}{23}(x+7) \;\Rightarrow\; 14x+23y-40=0$

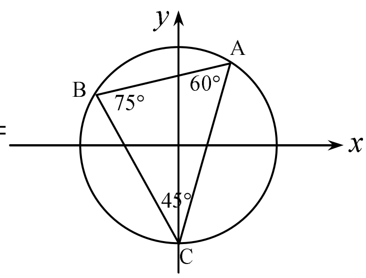
(2) (א) $z_{\mathrm{A}}=1+\sqrt{3}i \;\Rightarrow\; \mathrm{r}=|z_{\mathrm{A}}|=\sqrt{1+3}=2$

$\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3} \;\Rightarrow\; \theta_1=60^\circ\ ,\ \theta_2=240^\circ$

הפתרון $\theta_2=240^\circ$ נפסל, כי נתון שהמספר נמצא ברביע I ,

כלומר: $z_{\mathrm{A}}=2\mathrm{cis}60^\circ$.

אפשרות א':



$\measuredangle C=45^\circ \;\Rightarrow\; \overset{\frown}{AB}=90^\circ$

$z_{\mathrm{B}}=z_{\mathrm{A}}\cdot\mathrm{cis}90^\circ=2\,\mathrm{cis}(60^\circ+90^\circ)=$

$=2\,\mathrm{cis}150^\circ=2(\cos150^\circ+i\sin150^\circ)=$

$=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\cdot\frac{1}{2}\right)=-\sqrt{3}+i$

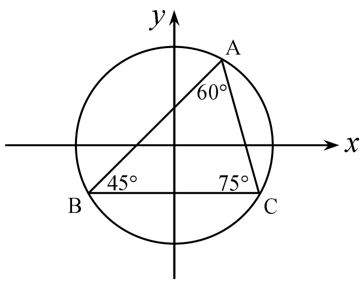
$\measuredangle A=60^\circ \;\Rightarrow\; \overset{\frown}{BC}=120^\circ$

$z_{\mathrm{C}}=z_{\mathrm{B}}\cdot\mathrm{cis}120^\circ=2\,\mathrm{cis}(150^\circ+120^\circ)=$

$=2\,\mathrm{cis}270^\circ=-2i$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

אפשרות ב' :



$$\measuredangle C = 75° \quad \Rightarrow \quad \overset{\frown}{AB} = 150°$$

$$z_B = z_A \cdot \text{cis}150° = 2\,\text{cis}(60° + 150°) =$$
$$= 2\,\text{cis}\,210° = 2(\cos 210° + i\sin 210°) =$$
$$= 2\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2} - i \cdot \tfrac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} - i$$

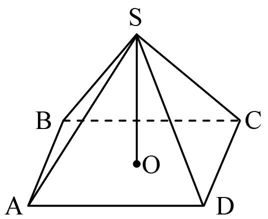
$$\measuredangle A = 60° \quad \Rightarrow \quad \overset{\frown}{BC} = 120°$$

$$z_C = z_B \cdot \text{cis}120° = 2\,\text{cis}(210° + 120°) =$$
$$= 2\,\text{cis}\,330° = 2(\cos 330° + i\sin 330°) =$$
$$= 2\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} - i$$

(ב) נתון : $SA = SB = SC = SD = \ell$,

$\measuredangle ASD = 52°$, $\measuredangle DSC = 36°$.

נעביר $SO \perp ABCD$.



לפי משפט הקוסינוסים ב- ΔSDC :

$$DC^2 = \ell^2 + \ell^2 - 2\ell^2 \cos 36° = 2\ell^2 (1 - \cos 36°)$$

לפי משפט הקוסינוסים ב- ΔASD :

$$AD^2 = \ell^2 + \ell^2 - 2\ell^2 \cos 52° = 2\ell^2 (1 - \cos 52°)$$

לפי משפט פיתגורס ב- ΔACD :

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 = 2\ell^2 (2 - \cos 36° - \cos 52°)$$

$$AC \approx 1.07268\ell \quad \Rightarrow \quad OC \approx 0.53634\ell$$

לפי משפט פיתגורס ב- ΔSOC :

$$SO^2 = SC^2 - OC^2$$

$$h^2 = \ell^2 - (0.53634\ell)^2 \approx 0.71234\ell^2$$

$$h = \sqrt{0.71234\ell^2} \approx 0.844\ell$$

(3) (א) $\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{ND}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=-\frac{2}{3}\underline{u}-\underline{v}+\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}=\frac{1}{3}\underline{u}-\frac{1}{2}\underline{v}$

$\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{3}(\underline{u}+\underline{v})=\frac{1}{3}\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v}$

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}=-\frac{1}{3}\underline{u}-\frac{1}{3}\underline{v}+\underline{v}+\frac{2}{3}\underline{u}=\frac{1}{3}\underline{u}+\frac{2}{3}\underline{v}$

(ב) $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{NP}=-\frac{21}{2}=\left(\frac{1}{3}\underline{u}+\frac{2}{3}\underline{v}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\underline{u}-\frac{1}{2}\underline{v}\right)$

$\frac{1}{9}|\underline{u}|^2-\frac{1}{6}\underline{u}\cdot\underline{v}+\frac{2}{9}\underline{u}\cdot\underline{v}-\frac{1}{3}|\underline{v}|^2=-\frac{21}{2}$ ①

$|\overrightarrow{NP}|=\sqrt{7}\ \Rightarrow\ \overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{NP}=7$

$\left(\frac{1}{3}\underline{u}-\frac{1}{2}\underline{v}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\underline{u}-\frac{1}{2}\underline{v}\right)=7\ \Rightarrow\ \frac{1}{9}|\underline{u}|^2+\frac{1}{4}|\underline{v}|^2-\frac{1}{3}\underline{u}\cdot\underline{v}=7$ ②

$|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{21}\ \Rightarrow\ \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MN}=21$

$\left(\frac{1}{3}\underline{u}+\frac{2}{3}\underline{v}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\underline{u}+\frac{2}{3}\underline{v}\right)=21\ \Rightarrow\ \frac{1}{9}|\underline{u}|^2+\frac{4}{9}|\underline{v}|^2+\frac{4}{9}\underline{u}\cdot\underline{v}=21$ ③

נסמן: $\underline{u}\cdot\underline{v}=z$, $|\underline{v}|^2=y$, $|\underline{u}|^2=x$, ונציב ב- ③ , ② , ① .

נקבל מערכת משוואות:

$$\begin{cases}\frac{1}{9}x+\frac{1}{18}z-\frac{1}{3}y=-\frac{21}{2}\\ \frac{1}{9}x+\frac{1}{4}y-\frac{1}{3}z=7\\ \frac{1}{9}x+\frac{4}{9}y+\frac{4}{9}z=21\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x-6y+z=-189\\ 4x+9y-12z=252\\ x+4y+4z=189\end{cases}$$

$z=-189-2x+6y$

$$\begin{cases}4x+9y-12(-189-2x+6y)=252\\ x+4y+\ \ 4(-189-2x+6y)=189\end{cases}$$

$$\begin{cases}28x-63y=-2{,}016\\ -7x+28y=945\quad /\cdot 4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}28x-63y=-2{,}016\\ -28x+112y=3{,}780\end{cases}$$

$49y=1{,}764\ \Rightarrow\ y=36\ \Rightarrow\ x=9\ \Rightarrow\ z=9$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

$$\left|\underline{u}\right|^2 = 9 \ \Rightarrow \ \left|\underline{u}\right| = 3$$

$$\left|\underline{v}\right|^2 = 36 \ \Rightarrow \ \left|\underline{v}\right| = 6$$

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = 9$$

(ג) $$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DN} = (\underline{v} - \underline{u}) \cdot \tfrac{2}{3}\underline{u} = \tfrac{2}{3}\underline{u} \cdot \underline{v} - \tfrac{2}{3}\left|\underline{u}\right|^2 = \tfrac{2}{3}(9 - 3^2) = 0$$

מכאן: $\overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{DN}$.

(ד) $$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = -\underline{u} + \tfrac{1}{3}\underline{u} + \tfrac{1}{3}\underline{v} = -\tfrac{2}{3}\underline{u} + \tfrac{1}{3}\underline{v}$$

$$\left|\overrightarrow{BM}\right| = \tfrac{1}{3}\sqrt{(-2\underline{u} + \underline{v}) \cdot (-2\underline{u} + \underline{v})} = \tfrac{1}{3}\sqrt{4\left|\underline{u}\right|^2 + \left|\underline{v}\right|^2 - 4\underline{u} \cdot \underline{v}} =$$

$$= \tfrac{1}{3}\sqrt{4 \cdot 9 + 36 - 4 \cdot 9} = \tfrac{1}{3} \cdot 6 = 2$$

$$\left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\underline{v}\right| = 6 \ \Rightarrow \ \left|\overrightarrow{BM}\right| = \tfrac{1}{3}\left|\overrightarrow{AD}\right|$$

(4) תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$:

$$\begin{cases} \cos x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases} \ \Rightarrow \ -\tfrac{\pi}{2} < x < \tfrac{\pi}{2}$$

(א) $$m_{\text{משיק}} = \tan\alpha \ \Rightarrow \ f'(x_{\text{השקה}}) = \tan 135° = -1$$

בנקודה $x = 0$: $$\frac{-\sin x}{\cos x} + b = -1 \ \Rightarrow \ 0 + b = -1 \ \Rightarrow \ b = -1$$

מכאן: $$f(x) = \ln(\cos x) - x$$

(ב) $$f'(x) = 0 \ \Rightarrow \ -\tan x - 1 = 0 \ \Rightarrow \ \tan x = -1$$

$$x = -\tfrac{\pi}{4} + \pi n \ , \ n \in \mathbb{Z}$$

בתחום ההגדרה נמצאת הנקודה ה"חשודה" לקיצון:

$$x = -\tfrac{\pi}{4} \ \Rightarrow \ y = \ln\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4} \ \Rightarrow \ \left(-\tfrac{\pi}{4}, \ln\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

המשך בעמוד הבא ➤➤➤

נבדוק את סוג הקיצון בעזרת הנגזרת השנייה:

$$f''(x)=(-\tan x-1)'=-\frac{1}{\cos^2 x}$$

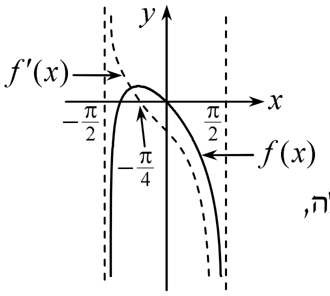
$$f''\left(-\frac{\pi}{4}\right)<0 \quad \Rightarrow \quad \max$$

לכן: $\max\left(-\frac{\pi}{4},\ln\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$.

(ג) מצאנו כי $\left(-\frac{\pi}{4},\ln\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ היא נקודת מקסימום,
לכן הפונקציה $f(x)$ עולה עבור $-\frac{\pi}{2}<x<-\frac{\pi}{4}$
ויורדת עבור $-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$.

(ד) $$\lim_{x\to\pm\frac{\pi}{2}}[\ln(\cos x)-x]=[\ln 0\mp\frac{\pi}{4}]=[-\infty\mp\frac{\pi}{4}]=-\infty$$

לכן $x=\pm\frac{\pi}{2}$ הן משוואות האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה.
אין אסיפטוטות אופקיות, כי נתון $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$.



(ה) ראו סרטוט משמאל.

(ו) לפונקציה $f(x)$ אין נקודות פיתול,
לכן לפונקציה $f'(x)$ אין נקודות קיצון.
עבור $-\frac{\pi}{2}<x<-\frac{\pi}{4}$ הפונקציה $f(x)$ עולה,
לכן בתחום זה $f'(x)$ חיובית.
עבור $-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$ הפונקציה $f(x)$ יורדת,
לכן בתחום זה $f'(x)$ שלילית.
בנקודה $x=-\frac{\pi}{4}$ יש לפונקציה $f(x)$ נקודת קיצון,
לכן בנקודה זו הפונקציה $f'(x)$ שווה ל- 0.
ראו סרטוט משמאל.

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(ז) נתון: $g(x)=f(x)\cdot f'(x)$.

הפונקציה $g(x)$ עולה כאשר $g'(x)>0$, כלומר כאשר:

$$[f'(x)]^2+f(x)\cdot f''(x)>0$$

בתחום $0<x<\frac{\pi}{2}$: $f(x)<0$

כמו כן, $f'(x)$ יורדת, לכן $f''(x)>0$.

קיבלנו בסך הכול: $(+)+(-)\cdot(-)>0$

כלומר בתחום $0<x<\frac{\pi}{2}$ $g'(x)>0$ והפונקציה $g(x)$ עולה.

(5) $f(x)=\sqrt[3]{(x-2)^2}+\sqrt[3]{(x-3)^2}$

(א) $f'(x)=\left[(x-2)^{\frac{2}{3}}+(x-3)^{\frac{2}{3}}\right]'=\frac{2}{3}(x-2)^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}(x-3)^{-\frac{1}{3}}=$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x-3}}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt[3]{x-3}+\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt[3]{(x-2)\,(x-3)}}$$

$$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; \sqrt[3]{x-3}+\sqrt[3]{x-2}=0 \;\Rightarrow\; \sqrt[3]{x-3}=-\sqrt[3]{x-2}$$

$$x-3=-x+2 \;\Rightarrow\; x=2.5 \;\Rightarrow\; y=2\sqrt[3]{0.25}=\sqrt[3]{8\cdot 0.25}=\sqrt[3]{2}$$

$f'(x)$ אינה מוגדרת עבור $x=2$ ו- $x=3$,

לכן ניקח זאת בחשבון בטבלת החקירה.

x	x < 2	x = 2	2 < x < 2.5	x = 2.5
f′(x)	−	0	+	0
f(x)	↘	min	↗	max

x	2.5 < x < 3	x = 3	x > 3
f′(x)	−	0	+
f(x)	↘	min	↗

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

$$f'(0)=\frac{2}{3}\cdot\frac{-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{(+)}<0 \qquad f'(4)=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{2}}{(+)}>0$$

$$f'(2.1)=\frac{2}{3}\cdot\frac{-\sqrt[3]{0.9}+\sqrt[3]{0.1}}{(-)}>0 \qquad f'(2.9)=\frac{2}{3}\cdot\frac{-\sqrt[3]{0.1}+\sqrt[3]{0.9}}{(-)}<0$$

נקודת מקסימום: $\left(2\frac{1}{2},\sqrt[3]{2}\right)$.

ב) $(i)+(ii)$

$$f'(x)=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt[3]{x-3}+\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt[3]{(x-2)\,(x-3)}}$$

תחום הגדרה: נדרוש מכנה $\neq 0$: $x\neq 2\ ,\ x\neq 3$

ג) בנקודות $x=3\ ,\ x=2$ הפונקציה $f'(x)$ לא קיימת,
ו- $f'(x)\neq 0$ בנקודות אלה, לכן לפי הגדרת נקודות הקיצון,
בנקודות אלה יש נקודות "חשודות" לקיצון, שהן נקודות מינימום.

ד) $f(2)=f(3)=1$, לכן:

$$S=\int_2^3[f(x)-1]dx=\int_2^3\left[(x-2)^{\frac{2}{3}}+(x-3)^{\frac{2}{3}}-1\right]dx=$$

$$=\left[\frac{3}{5}(x-2)^{\frac{5}{3}}+\frac{3}{5}(x-3)^{\frac{5}{3}}-x\right]\Big|_2^3=$$

$$=\left(\frac{3}{5}\cdot 1^{\frac{5}{3}}+\frac{3}{5}\cdot 0^{\frac{5}{3}}-3\right)-\left[\frac{3}{5}\cdot 0^{\frac{5}{3}}+\frac{3}{5}\cdot(-1)^{\frac{5}{3}}-2\right]=$$

$=\frac{3}{5}-3+\frac{3}{5}+2=\frac{1}{5}$ יחידת שטח

גבי יקואל

משבצת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929