

פתרון מבחן מס' 27 (ספר לימוד – שאלון 035807)

(1) נתון: $A(1,0)$, $\Delta OAP \sim \Delta ORQ$.

$$z_Q = r_Q \operatorname{cis} \theta_Q, z_P = r_P \operatorname{cis} \theta_P, z_R = r_R \operatorname{cis} \theta_R, z_A = 1 \cdot \operatorname{cis} 0^\circ \quad (\alpha)$$

לפי דמיון המשולשים הנתון, מתקיים: $\angle AOP = \angle ROQ$, $\frac{OQ}{OP} = \frac{OR}{OA}$

$$\frac{r_Q}{r_P} = \frac{r_R}{r_A} \Rightarrow \frac{r_Q}{r_P} = \frac{r_R}{1} \Rightarrow r_R = \frac{r_Q}{r_P} \quad (*) \quad \text{מכאן:}$$

$$\frac{z_Q}{z_P} = \frac{r_Q \operatorname{cis} \angle AOQ}{r_P \operatorname{cis} \angle AOP} = \frac{r_Q}{r_P} \operatorname{cis}(\angle AOQ - \angle AOP) =$$

$$= r_R \operatorname{cis}(\angle AOR + \angle ROQ - \angle AOP) = r_R \operatorname{cis}(\angle AOR) = z_R$$

(ב) נתון: $z_Q = 1 + 2i$, $z_P = 2 + i$

$$z_R = \frac{z_Q}{z_P} = \frac{1+2i}{2+i} = \frac{1+2i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{4+3i}{5} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i \quad \text{לפי סעיף (א):}$$

$$\vec{OP} = (2,1), \vec{OA} = (1,0) \quad (\gamma)$$

$$\cos \angle AOP = \frac{\vec{OP} \cdot \vec{OA}}{|\vec{OP}| \cdot |\vec{OA}|} = \frac{(2,1) \cdot (1,0)}{\sqrt{4+1} \cdot \sqrt{1+0}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\angle AOP = \angle QOR \approx 26.565^\circ$$

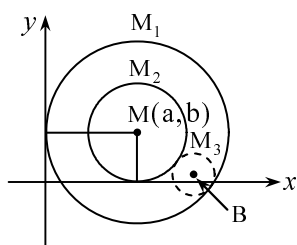
דרך אחרת:

$$\angle ROQ = \angle AOP = \arctan \frac{y_P}{x_P} = \arctan \frac{1}{2} \approx 26.565^\circ$$

$$S_{\Delta ORQ} = \frac{OQ \cdot QR}{2} \sin \angle QOR = \frac{r_Q \cdot r_R}{2} \sin 26.565^\circ \quad (\delta)$$

$$r_Q = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}, \quad r_R = \frac{r_Q}{r_P} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$$

$$S_{\Delta ORQ} = \frac{\sqrt{5} \cdot 1}{2} \sin 26.565^\circ = \text{יחידת שטח} \cdot \frac{1}{2} \quad \text{מכאן:}$$



$$M_3 : (x-21)^2 + (y-1)^2 = 9 \quad (2)$$

מרכז המעגל R_3 הוא $B(21,1)$ ורדיוסו $R_3 = 3$.

נסמן ב- $M(a,b)$ את נקודת מרכז

המעגלים M_1 ו- M_2 . מכאן: $a, b < 21$.

(א) $R_1 = a$, $R_2 = b$

המרחק בין מרכזי המעגלים:

$$\begin{cases} MB = R_2 + R_3 = b + 3 \\ MB = R_1 - R_3 = a - 3 \end{cases} \Rightarrow b + 3 = a - 3 \Rightarrow a = b + 6$$

$$\sqrt{(21-a)^2 + (1-b)^2} = b + 3$$

$$\sqrt{(21-b-6)^2 + (1-b)^2} = b + 3$$

$$(15-b)^2 + (1-b)^2 = (b+3)^2$$

$$b^2 - 30b + 225 + b^2 - 2b + 1 = b^2 + 6b + 9$$

$$b^2 - 38b + 217 = 0 \Rightarrow b_{1,2} = \frac{38 \pm 24}{2}$$

$$b_1 = 31 \Rightarrow b < 21 \text{ כי נפסל}$$

$$b_2 = 7 \Rightarrow a = 7 + 6 = 13$$

$$(x-13)^2 + (y-7)^2 = 169$$

: משוואת מעגל M_1

$$(x-13)^2 + (y-7)^2 = 49$$

: משוואת מעגל M_2

(ב) נתון: $AT \perp MB$, $AT = 8$

$$MB = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

$$S_{\triangle AMB} = \frac{10 \cdot 8}{2} = 40 \text{ יחידות שטח}$$

$$m_{MB} = \frac{6}{-8} = -\frac{3}{4}$$

: משוואת MB

$$y-1 = -\frac{3}{4}(x-21)$$

$$3x + 4y - 67 = 0$$

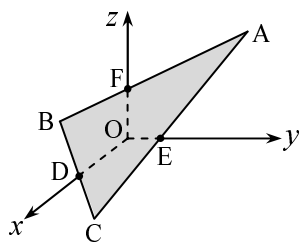
המשך בעמוד הבא <<<

מרחק הנקודה $A(k,0)$ מהישר MB שווה ל-8, מכאן:

$$\frac{|3 \cdot k + 4 \cdot 0 - 67|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 8 \Rightarrow \frac{|3k - 67|}{5} = 8 \Rightarrow |3k - 67| = 40$$

$$3k - 67 = 40 \Rightarrow k = 35\frac{2}{3} \Rightarrow k < 13 \text{ כי נפסל}$$

$$3k - 67 = -40 \Rightarrow k = 9$$



$$F = \frac{A+B}{2}$$

לפי $AF = FB$:

$$B = 2F - A \Rightarrow B(-m, -n, 2z_1 - p)$$

$$E = \frac{A+C}{2}$$

לפי $AE = EC$:

$$C = 2E - A \Rightarrow C(-m, 2y_1 - n, -p)$$

$$D = \frac{B+C}{2} \Rightarrow D(-m, y_1 - n, z_1 - p)$$

לפי $BD = DC$:

$$\begin{cases} -m = x_1 & A(-x_1, y_1, z_1) \\ y_1 - n = 0 & B(x_1, -y_1, z_1) \\ z_1 - p = 0 & C(x_1, y_1, -z_1) \end{cases} \quad \text{מכאן:}$$

(ב) משוואת המישור ABC : $A_0x + B_0y + C_0z + D = 0$

הנקודה F נמצאת במישור, לכן: $A_0 \cdot 0 + B_0 \cdot 0 + C_0 \cdot z_1 + D = 0$

הנקודה E נמצאת במישור, לכן: $A_0 \cdot 0 + B_0 \cdot y_1 + C_0 \cdot 0 + D = 0$

הנקודה D נמצאת במישור, לכן: $A_0 \cdot x_1 + B_0 \cdot 0 + C_0 \cdot 0 + D = 0$

המשך בעמוד הבא <<<

$$\begin{cases} C_0 z_1 + D = 0 \\ B_0 y_1 + D = 0 \\ A_0 x_1 + D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_0 = -\frac{D}{z_1} \\ B_0 = -\frac{D}{y_1} \\ A_0 = -\frac{D}{x_1} \end{cases}$$

$$-\frac{D}{x_1}x - \frac{D}{y_1}y - \frac{D}{z_1}z + D = 0 \quad / : (-D)$$

$$\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} + \frac{z}{z_1} - 1 = 0 \quad / \cdot x_1 y_1 z_1$$

$$y_1 z_1 \cdot x + x_1 z_1 \cdot y + x_1 y_1 \cdot z - x_1 y_1 z_1 = 0$$

$$\begin{cases} AB = c \\ BC = a \\ AC = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{4x_1^2 + 4y_1^2 + 0} = c \\ \sqrt{0 + 4y_1^2 + 4z_1^2} = a \\ \sqrt{4x_1^2 + 0 + 4z_1^2} = b \end{cases} \quad (ג)$$

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = \frac{c^2}{4} & ① \\ y_1^2 + z_1^2 = \frac{a^2}{4} & ② \\ x_1^2 + z_1^2 = \frac{b^2}{4} & ③ \end{cases}$$

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8} \quad ④ \quad \text{לפי } ① + ② + ③ :$$

$$x_1^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8} - \frac{a^2}{4} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{8} \quad \text{לפי } ④ + ② :$$

$$y_1^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8} - \frac{b^2}{4} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{8} \quad \text{לפי } ④ + ③ :$$

$$z_1^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8} - \frac{c^2}{4} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{8} \quad \text{לפי } ④ + ① :$$

$$y_1 z_1 \cdot x + x_1 z_1 \cdot y + x_1 y_1 \cdot z - x_1 y_1 z_1 = 0 \quad \text{(ד) מרחק המישור ABC :}$$

מהראשית (0,0,0) הוא :

$$\frac{|-x_1 y_1 z_1|}{\sqrt{(y_1 z_1)^2 + (x_1 z_1)^2 + (x_1 y_1)^2}} = \frac{x_1 y_1 z_1}{\sqrt{y_1^2 z_1^2 + x_1^2 z_1^2 + x_1^2 y_1^2}} \quad x, y, z > 0$$

המשך בעמוד הבא <<<

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} S_{\triangle ODE} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{OD \cdot OE}{2} \cdot OF = \frac{1}{6} \cdot OD \cdot OE \cdot OF = \frac{1}{6} \cdot x_1 y_1 z_1 = \quad (ה) \\ &= \frac{1}{6} \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{8} \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{8} \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{8}} = \\ &= \frac{1}{96} \sqrt{\frac{(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2)(b^2 + c^2 - a^2)}{2}} \end{aligned}$$

(4) (א) נסמן ב- t_2 חודשים את מספר החודשים שבין המדידה השנייה לשלישית,

ואז $t_1 = t_2 + 4$ יהיה מספר החודשים שבין המדידה הראשונה לשנייה.

$$\begin{cases} 2,190 = 1,600 \cdot a^{t_2+4} \\ 2,562 = 2,190 \cdot a^{t_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^4 \cdot a^{t_2} = 1.36875 \\ a^{t_2} = 1.169863 \end{cases} \quad (i)$$

$$a^4 \cdot 1.169863 = 1.36875 \Rightarrow a \approx 1.04$$

$$1 + \frac{p}{100} = 1.04 \Rightarrow p = 4\%$$

$$1.04^{t_2} = 1.169863 \Rightarrow t_2 = \frac{\ln 1.169863}{\ln 1.04} \approx 4 \quad (ii)$$

$$t_1 = 4 + t_2 = 4 + 4 = 8 \text{ חודשים}$$

(ב) (i) נתון: $y'(\sqrt{e}) = 0$.

$$y' = \frac{kx^{k-1} \cdot \ln x - x^k \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{x^{k-1} \cdot (k \ln x - 1)}{\ln^2 x}$$

$$\frac{\sqrt{e}^{k-1} \cdot (k \ln \sqrt{e} - 1)}{\ln^2 \sqrt{e}} = 0 \Rightarrow k \ln \sqrt{e} - 1 = 0$$

$$\frac{1}{2}k = 1 \Rightarrow k = 2$$

$$y(\sqrt{e}) = \frac{\sqrt{e}^2}{\ln \sqrt{e}} = \frac{e}{0.5} = 2e \quad (ii)$$

$$y' = \frac{x(2 \ln x - 1)}{\ln^2 x} = \frac{2x \ln x - x}{\ln^2 x}$$

$$y'(1.5) < 0, \quad y'(2) > 0 \Rightarrow \min(\sqrt{e}, 2e)$$

$$(a < 0) \quad f(x) = \frac{e^{\frac{a}{x}}}{x^2} \quad (5)$$

$$x^2 \neq 0, x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \quad (א) \quad (i) \quad \text{תחום הגדרה:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{a}{x}}}{x^2} = \left(\frac{\infty}{0} \right) = \infty \quad (ii)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{a}{x}}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^{-\frac{a}{x}} \cdot x^2} = \left(\frac{1}{\infty \cdot 0} \right)$$

פונקציה מעריכית עם בסיס גדול מ-1 עולה מהר יותר

$$\left(\frac{1}{\infty \cdot 0} \right) = \left(\frac{1}{\infty} \right) = 0 \quad \text{מפונקציית חזקה, לכן במקרה זה:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{a}{x}}}{x^2} = 0 \quad \text{כלומר:}$$

$x = 0$ אסימפטוטה אנכית שמאלית.

$$f'(x) = \frac{e^{\frac{a}{x}} \cdot \left(-\frac{a}{x^2}\right) \cdot x^2 - 2x \cdot e^{\frac{a}{x}}}{x^4} = \frac{-e^{\frac{a}{x}} \cdot (a + 2x)}{x^4} \quad (iii)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-e^{\frac{a}{x}} \cdot (a + 2x)}{x^4} = 0 \Rightarrow e^{\frac{a}{x}} (a + 2x) = 0$$

$$a + 2x = 0 \quad e^{\frac{a}{x}} > 0 \text{ לכל } x, \text{ לכן:}$$

$$x = -\frac{a}{2} \Rightarrow y = \frac{4e^{-2}}{a^2} = \frac{4}{a^2 e^2}$$

$$. a + 2x \text{ לפי הביטוי } \frac{-e^{\frac{a}{x}}}{x^4} < 0 \text{ לכל } x, \text{ לכן סימן הנגזרת נקבע לפי הביטוי}$$

$$. \max\left(-\frac{a}{2}, \frac{4}{a^2 e^2}\right) \text{ מכאן:}$$

(ב) ראו פתרון בספר הבחינות, עמוד 1,161.

המשך בעמוד הבא <<<

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{-a} \frac{e^{\frac{a}{x}}}{x^2} dx = \quad (ג)$$

נסמן: $e^{\frac{a}{x}} = t$, מכאן: $dt = -\frac{a}{x^2} \cdot e^{\frac{a}{x}} \cdot dx \Rightarrow dx = \frac{-x^2}{ae^{\frac{a}{x}}} dt$

$$\int \frac{e^{\frac{a}{x}}}{x^2} dx = \int \frac{e^{\frac{a}{x}}}{x^2} \cdot \left(-\frac{x^2}{ae^{\frac{a}{x}}}\right) dt = \int -\frac{1}{a} dt = -\frac{t}{a} = \frac{-e^{\frac{a}{x}}}{a}$$

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{-a} \frac{e^{\frac{a}{x}}}{x^2} dx = \left(\frac{-e^{\frac{a}{x}}}{a}\right) \Bigg|_{-\frac{a}{2}}^{-a} = -\frac{e^{-1}}{a} + \frac{e^{-2}}{a} = \frac{-e+1}{ae^2}$$

$$\frac{-e+1}{ae^2} = \frac{e-1}{2e^2} \quad \text{נתון:}$$

$$a = -2 \quad \text{מכאן:}$$

גבי יקואל

משוב צת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

♦ לכל הכיתות ♦ לכל השאלונים ♦ לכל הרמות