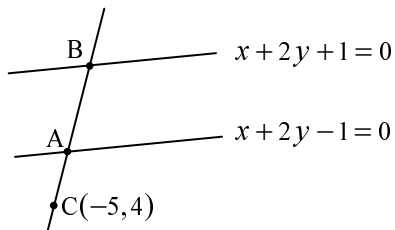


פתרון מבחן מס' 26 (ספר לימוד – שאלון 035807)



(1) לפי הנתון: $AB = 5$.

נסמן ב- m את שיפוע הישר CB ,

לכן משוואת הישר:

$$y - 4 = m(x + 5)$$

$$y = mx + 5m + 4$$

$$x + 2(mx + 5m + 4) - 1 = 0$$

שיעורי הנקודה A :

$$x(1 + 2m) = -10m - 7 \Rightarrow x_A = -\frac{10m + 7}{1 + 2m}$$

$$y_A = \frac{1 - x_A}{2} = \frac{1 + \frac{10m + 7}{1 + 2m}}{2} = \frac{4 + 6m}{1 + 2m}$$

$$x + 2(mx + 5m + 4) + 1 = 0$$

שיעורי הנקודה B :

$$x(1 + 2m) = -9 - 10m \Rightarrow x_B = -\frac{10m + 9}{1 + 2m}$$

$$y_B = \frac{-1 - x_B}{2} = \frac{-1 + \frac{10m + 9}{1 + 2m}}{2} = \frac{4 + 4m}{1 + 2m}$$

$$AB = 5 \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{10m + 7}{1 + 2m} - \frac{10m + 9}{1 + 2m}\right)^2 + \left(\frac{4 + 6m}{1 + 2m} - \frac{4 + 4m}{1 + 2m}\right)^2} = 5$$

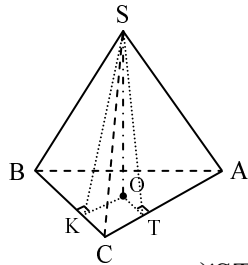
$$\sqrt{\frac{4}{(1 + 2m)^2} + \frac{4m^2}{(1 + 2m)^2}} = 5 \Rightarrow \frac{4 + 4m^2}{(1 + 2m)^2} = 25$$

$$100m^2 + 100m + 25 = 4 + 4m^2 \Rightarrow 96m^2 + 100m + 21 = 0$$

$$m_{1,2} = \frac{-100 \pm 44}{192} \Rightarrow m_1 = -\frac{7}{24}, m_2 = -\frac{3}{4}$$

$$m_1 = -\frac{7}{24} \Rightarrow y - 4 = -\frac{7}{24}(x + 5) \Rightarrow 7x + 24y - 61 = 0$$

$$m_2 = -\frac{3}{4} \Rightarrow y - 4 = -\frac{3}{4}(x + 5) \Rightarrow 3x + 4y - 1 = 0$$



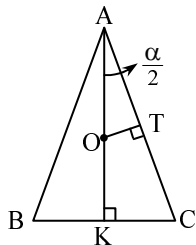
(2) מנקודה O נוריד אנך OK ל-BC ואנך OT ל-AC.
נתון: $SO = h$ (גובה הפירמידה).

(א) לפי המשפט על שלושת האנכים נקבל:
 $ST \perp AC$, $SK \perp BC$

ומכאן לפי ההגדרה והנתונים: $\angle STO = \beta$, $\angle SKO = \gamma$

$$\text{tg } \beta = \frac{SO}{OT} \Rightarrow OT = \frac{h}{\text{tg } \beta} \quad \text{ב-} \Delta STO$$

$$\text{tg } \gamma = \frac{SO}{OK} \Rightarrow OK = \frac{h}{\text{tg } \gamma} \quad \text{ב-} \Delta SKO$$



ב- ΔABC , הנקודה O (עקב הגובה) היא מרכז המעגל החוסם את המשולש (כי הפירמידה היא ישרה), כלומר הנקודה O היא נקודת חיתוך האנכים האמצעיים לצלעות המשולש ABC.

$$AT = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} a$$

$$\text{tg } \frac{\alpha}{2} = \frac{OT}{AT} \quad \text{ב-} \Delta OAT$$

$$\text{tg } \frac{\alpha}{2} = \frac{h \cdot 2}{\text{tg } \beta \cdot a} \Rightarrow \text{tg } \beta = \frac{2h}{a \text{tg } \frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{AT}{AO} \Rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2AO} \Rightarrow AO = \frac{a}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{AK}{AC} \Rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{AK}{a} \Rightarrow AK = a \cos \frac{\alpha}{2} \quad \text{ב-} \Delta AKC$$

$$OK = AK - AO = a \cos \frac{\alpha}{2} - \frac{a}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} (2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1) = \frac{a \cos \alpha}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{a \cos \alpha}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{h}{\text{tg } \gamma} \Rightarrow \text{tg } \gamma = \frac{2h \cos \frac{\alpha}{2}}{a \cos \alpha}$$

המשך בעמוד הבא <<<

$$\operatorname{tg} \beta = 0.67 \operatorname{tg} \gamma \Rightarrow \frac{2h}{a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = 0.67 \cdot \frac{2h \cos \frac{\alpha}{2}}{a \cos \alpha} \quad (\text{ב})$$

$$\cos \alpha = 0.67 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \cos \alpha = 0.67 \sin \frac{\alpha}{2}$$

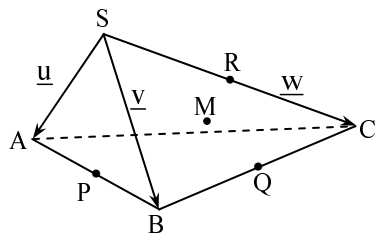
$$1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 0.67 \sin \frac{\alpha}{2} \Rightarrow 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 0.67 \sin \frac{\alpha}{2} - 1 = 0$$

$$\left(\sin \frac{\alpha}{2}\right)_{1,2} \approx \frac{-0.67 \pm 2.907}{4} \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = 0.55925 \text{ או } \sin \frac{\alpha}{2} = -0.894$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = -0.894 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \approx -63.4^\circ \Rightarrow \alpha \approx -126.8^\circ$$

זוה לא ייתכן.

$$\sin \frac{\alpha}{2} = 0.55925 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \approx 34^\circ \Rightarrow \alpha \approx 68^\circ$$



(3) נתון: $|\underline{u}| = 1$, $|\underline{v}| = 2$, $|\underline{w}| = 4$

$\sphericalangle ASC = 90^\circ$, $\sphericalangle ASB = \sphericalangle BSC = 60^\circ$

$\underline{u} \cdot \underline{w} = 0$ מהנתון נסיק:

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos 60^\circ = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\underline{v} \cdot \underline{w} = |\underline{v}| \cdot |\underline{w}| \cdot \cos 60^\circ = 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 4$$

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SR} = \frac{1}{2}(\underline{u} - \underline{v}) - \underline{u} + \frac{1}{2}\underline{w} = -\frac{1}{2}\underline{u} - \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w} \quad (\text{א})$$

$$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} = (\underline{v} - \underline{u}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) =$$

$$= \underline{v} - \underline{u} + \frac{1}{2}[\underline{w} - \underline{u} - (\underline{v} - \underline{u})] = -\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SM} = -\underline{u} + \frac{2}{3}\overrightarrow{SQ} = -\underline{u} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}) =$$

$$= -\underline{u} + \frac{1}{3}(\underline{v} + \underline{w}) = -\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}$$

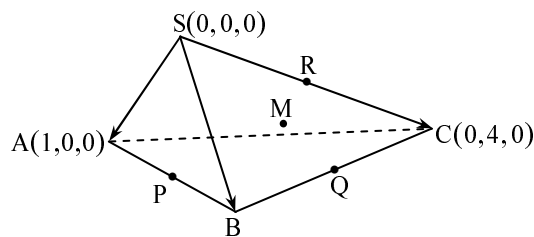
המשך בעמוד הבא <<<

$$\begin{aligned}
 |\vec{PR}| &= \sqrt{\left[-\frac{1}{2}(\underline{u} + \underline{v} - \underline{w})\right] \cdot \left[-\frac{1}{2}(\underline{u} + \underline{v} - \underline{w})\right]} = & (ב) \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{|\underline{u}|^2 + |\underline{v}|^2 + |\underline{w}|^2 + 2\underline{u} \cdot \underline{v} - 2\underline{u} \cdot \underline{w} - 2\underline{v} \cdot \underline{w}} = \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{1+4+16+2-0-8} = \frac{1}{2} \sqrt{15}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\vec{AQ}| &= \sqrt{\left[\frac{1}{2}(-2\underline{u} + \underline{v} + \underline{w})\right] \cdot \left[\frac{1}{2}(-2\underline{u} + \underline{v} + \underline{w})\right]} = \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{4|\underline{u}|^2 + |\underline{v}|^2 + |\underline{w}|^2 - 4\underline{u} \cdot \underline{v} - 4\underline{u} \cdot \underline{w} + 2\underline{v} \cdot \underline{w}} = \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{4+4+16-4-0+8} = \frac{1}{2} \sqrt{28} = \sqrt{7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\vec{AM}| &= \sqrt{\left[\frac{1}{3}(-3\underline{u} + \underline{v} + \underline{w})\right] \cdot \left[\frac{1}{3}(-3\underline{u} + \underline{v} + \underline{w})\right]} = \\
 &= \frac{1}{3} \sqrt{9|\underline{u}|^2 + |\underline{v}|^2 + |\underline{w}|^2 - 6\underline{u} \cdot \underline{v} - 6\underline{u} \cdot \underline{w} + 2\underline{v} \cdot \underline{w}} = \\
 &= \frac{1}{3} \sqrt{9+4+16-6-0+8} = \frac{1}{3} \sqrt{31}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cos \alpha &= \frac{\vec{PR} \cdot \vec{AQ}}{|\vec{PR}| \cdot |\vec{AQ}|} = \frac{-\frac{1}{2}(\underline{u} + \underline{v} - \underline{w}) \cdot \frac{1}{2}(-2\underline{u} + \underline{v} + \underline{w})}{\frac{1}{2} \sqrt{15} \cdot \sqrt{7}} = & (ג) \\
 &= \frac{-\frac{1}{4}(-2|\underline{u}|^2 + |\underline{v}|^2 - |\underline{w}|^2 - \underline{u} \cdot \underline{v} + 3\underline{u} \cdot \underline{w})}{\frac{1}{2} \sqrt{105}} = \\
 &= \frac{-\frac{1}{2}(-2+4-16-1+0)}{\sqrt{105}} = \frac{-\frac{1}{2} \cdot (-15)}{\sqrt{105}} = \frac{15}{2\sqrt{105}} \Rightarrow \alpha \approx 42.95^\circ
 \end{aligned}$$



(ד) (i) נסמן: $B(a, b, c)$

$$|\vec{SB}| = 2 \quad (\text{נתון}),$$

מכאן:

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4 \quad (*)$$

המשך בעמוד הבא <<<

$$\angle ASB = 60^\circ \Rightarrow \cos 60^\circ = \frac{\vec{SA} \cdot \vec{SB}}{|\vec{SA}| \cdot |\vec{SB}|} = \frac{(1,0,0) \cdot (a,b,c)}{1 \cdot 2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow a = 1 \quad (**)$$

$$\angle BSC = 60^\circ \Rightarrow \cos 60^\circ = \frac{\vec{SB} \cdot \vec{SC}}{|\vec{SB}| \cdot |\vec{SC}|} = \frac{(a,b,c) \cdot (0,4,0)}{2 \cdot 4}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{4b}{8} \Rightarrow b = 1 \quad (***)$$

נציב את (**) ו- (***) ב- (*) ונקבל:

$$1 + 1 + c^2 = 4 \Rightarrow c^2 = 2 \Rightarrow c = \pm\sqrt{2}$$

נתון כי כל שיעורי הקדקוד B חיוביים, לכן:

$$B(1,1,\sqrt{2})$$

(ii) נסמן ב- $Ax + By + Cz + D = 0$ את משוואת המישור SBC.

$D = 0$ מכיוון שהמישור עובר דרך $S(0,0,0)$.

$$(A,B,C) \cdot \vec{SB} = 0 \Rightarrow (A,B,C) \cdot (1,1,\sqrt{2}) = 0$$

$$A + B + \sqrt{2}C = 0 \quad \text{מכאן:}$$

$$(A,B,C) \cdot \vec{SC} = 0 \Rightarrow (A,B,C) \cdot (0,4,0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$A + \sqrt{2}C = 0 \quad \text{נציב } B = 0 \text{ במשוואה הראשונה ונקבל:}$$

$$A = \sqrt{2} \quad \text{נבחר } C = -1 \text{ ונקבל:}$$

$$\sqrt{2}x - z = 0 \quad \text{משוואת המישור:}$$

$$d = \frac{|\sqrt{2} \cdot x_A - z_A|}{\sqrt{2+1}} = \frac{|\sqrt{2} - 0|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad \text{יחידות אורך} \quad (iii)$$

$$k \cdot 1.1^x \cdot 1.2^{x+2} = M \quad (i) \quad (א) \quad (4) \quad \text{מהשאלה נקבל את המשוואה:}$$

$$k \cdot 1.1^x \cdot 1.2^x \cdot 1.2^2 = M$$

$$1.1^x \cdot 1.2^x = \frac{M}{1.44k} \Rightarrow 1.32^x = \frac{25M}{36k} \Rightarrow x = \frac{\ln \frac{25M}{36k}}{\ln 1.32}$$

(ii) ניעזר בסעיף (i), נציב ונקבל:

$$x = \frac{\ln \frac{25 \cdot 39,204}{36 \cdot 15,625}}{\ln 1.32} = \frac{\ln 1.7424}{\ln 1.32} = 2$$

כעבור חודשיים, היו בבריכה:

$$M_2 = M_0 \cdot q^2 = k \cdot 1.1^2 = 15,625 \cdot 1.21 = 18,906.25 \text{ טון דגים}$$

$$[\ln(x^2 + 4)]' = \frac{2x}{x^2 + 4} \quad (i) \quad (ב)$$

$$V = \pi \int_a^{a+2} [f(x)]^2 dx = \pi \int_a^{a+2} \frac{x}{x^2 + 4} dx = (א) \text{ לפי סעיף } (ii)$$

$$= \pi \cdot \frac{1}{2} [\ln(x^2 + 4)]_a^{a+2} =$$

$$= \frac{\pi}{2} [\ln(a^2 + 4a + 4 + 4) - \ln(a^2 + 4)] = \frac{\pi}{2} \cdot \ln \frac{a^2 + 4a + 8}{a^2 + 4}$$

$$\frac{\pi}{2} \cdot \ln \frac{a^2 + 4a + 8}{a^2 + 4} = \pi \ln \sqrt{2.5} \quad \text{נתון:}$$

$$\ln \frac{a^2 + 4a + 8}{a^2 + 4} = 2 \ln \sqrt{2.5} = \ln 2.5$$

$$\frac{a^2 + 4a + 8}{a^2 + 4} = \frac{5}{2} \Rightarrow 2a^2 + 8a + 16 = 5a^2 + 20$$

$$3a^2 - 8a + 4 = 0 \Rightarrow a_{1,2} = \frac{8 \pm 4}{6} \Rightarrow a_1 = 2, a_2 = \frac{2}{3}$$

(5) (א) $(e^{2x-a} + 2)^2 > 0$ (ריבוע של מספר השונה מאפס תמיד חיובי).

$e^{2x-a} > 0$ לכל x , לכן $\frac{12e^{2x-a}}{(e^{2x-a} + 2)^2} > 0$ לכל x ,

כלומר $f'(x) > 0$ לכל x , כלומר הפונקציה $f(x)$ עולה לכל x .

(ב) + (ג) $f''(x) = [f'(x)]' = \left[\frac{12e^{2x-a}}{(e^{2x-a} + 2)^2} \right]' =$

$$= 12 \cdot \frac{2e^{2x-a}(e^{2x-a} + 2)^2 - e^{2x-a} \cdot 2(e^{2x-a} + 2) \cdot 2e^{2x-a}}{(e^{2x-a} + 2)^4} =$$

$$= 12 \cdot \frac{2e^{2x-a}(e^{2x-a} + 2) \cdot (e^{2x-a} + 2 - 2e^{2x-a})}{(e^{2x-a} + 2)^4} =$$

$$= \frac{24e^{2x-a}(-e^{2x-a} + 2)}{(e^{2x-a} + 2)^3}$$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 24e^{2x-a}(-e^{2x-a} + 2) = 0$

$24e^{2x-a} \neq 0$ לכל x , אז למשוואה $e^{2x-a} = 2$ יש פתרון יחיד.

$2x - a = \ln 2$, $x = \frac{a + \ln 2}{2}$

מכיוון ש- $f''(x)$ משנה את סימנה סביב הנקודה $x = \frac{a + \ln 2}{2}$,

הרי שזו נקודת פיתול (היחידה) של $f(x)$.

(ד) $\int_0^x f'(x) dx = \int_0^{\frac{a+\ln 2}{2}} \frac{12e^{2x-a}}{(e^{2x-a} + 2)^2} dx$

נסמן: $t = e^{2x-a} + 2$, ואז: $dx = \frac{dt}{2e^{2x-a}}$

$$\int \frac{12e^{2x-a}}{(e^{2x-a} + 2)^2} dx = \int \frac{12e^{2x-a}}{t^2} \cdot \frac{dt}{2e^{2x-a}} = \int \frac{6}{t^2} dt = -\frac{6}{t} + C$$

המשך בעמוד הבא <<<

$$\int_0^{\frac{a+\ln 2}{2}} \frac{12e^{2x-a}}{(e^{2x-a}+2)^2} dx = \left(\frac{-6}{e^{2x-a}+2} \right) \Big|_0^{\frac{a+\ln 2}{2}} =$$

$$= \frac{-6}{e^{\ln 2}+2} + \frac{6}{e^{-a}+2} = -\frac{6}{4} + \frac{6}{e^{-a}+2}$$

$$-\frac{6}{4} + \frac{6}{e^{-a}+2} = \frac{33}{26} \Rightarrow \frac{6}{e^{-a}+2} = \frac{36}{13} \Rightarrow e^{-a}+2 = \frac{13}{6}$$

$$e^{-a} = \frac{1}{6} \Rightarrow e^a = 6 \Rightarrow a = \ln 6$$

$$a = \ln 6$$

(ה)

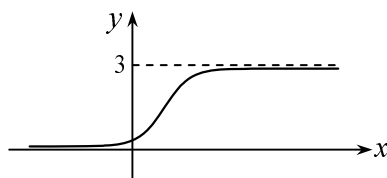
$$x_{\text{פיתול}} = \frac{a + \ln 2}{2} = \frac{\ln 6 + \ln 2}{2} = \frac{1}{2} \ln 12$$

$$f'''(x) = \frac{(+)(2 - e^{2x-\ln 6})}{(+)}$$

$$f'''(0) = \frac{(+)(2 - \frac{1}{6})}{(+)} > 0 \quad f'''(4) = \frac{(+)(2 - e^{8-\ln 6})}{(+)} < 0$$

הפונקציה קעורה כלפי מעלה \cup עבור $x < \frac{1}{2} \ln 12$,

הפונקציה קעורה כלפי מטה \cap עבור $x > \frac{1}{2} \ln 12$.



(ו)

גבי יקואל

מ ש ב צ ת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

לכל הכיתות ✦ לכל השאלונים ✦ לכל הרמות