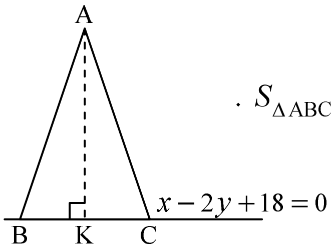
פתרון מבחן מס' 25 (ספר לימוד – שאלון 035807)



(1) נתון: $x_C = y_A = 0$, $x_B , y_B , y_C , x_A \ge 0$,

משוואת BC : $y=\frac{x}{2}+9$, 90 יחידות שטח $= S_{\Delta ABC}$.

נמצא את שיעורי הנקודה C :

$$x_C = 0 \;\Rightarrow\; y_C = \tfrac{0}{2}+9=9 \;\Rightarrow\; C(0,9)$$

נסמן: $x_A = a$, $x_B = b$ $(a , b > 0)$, מכאן: $y_B = \frac{b}{2}+9$.

$AK \perp BC$, AK הוא מרחק הנקודה $A(a,0)$ מהישר BC , לכן:

$$AK = h = \frac{|a-2\cdot 0+18|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{|a+18|}{\sqrt{5}} = \frac{a+18}{\sqrt{5}} \quad (a>0)$$

$$AB = AC \;\Rightarrow\; \sqrt{(a-b)^2+\left(\tfrac{b}{2}+9\right)^2} = \sqrt{a^2+9^2}$$

$$a^2-2ab+b^2+\frac{b^2}{4}+9b+81 = a^2+81$$

$$\tfrac{5}{4}b^2-2ab+9b=0 \;\Rightarrow\; b\left(\tfrac{5}{4}b-2a+9\right)=0$$

$b_1 = 0 \;\Rightarrow$ לא ייתכן, כי $b>0$

$$\tfrac{5}{4}b-2a+9=0 \;\Rightarrow\; a=\tfrac{5}{8}b+\tfrac{9}{2}$$

$$S_{\Delta ABC}=90 \;\Rightarrow\; 90=\frac{BC\cdot AK}{2} \;\Rightarrow\; 90=\frac{\sqrt{b^2+\left(\frac{b}{2}+9-9\right)^2}\cdot(a+18)}{2\cdot\sqrt{5}}$$

$$180\sqrt{5}=\frac{b\sqrt{5}}{2}\left(\tfrac{5b}{8}+\tfrac{9}{2}+18\right) \;\Rightarrow\; 180=\frac{5b^2}{16}+\frac{45b}{4}$$

$$b^2+36b-576=0 \;\Rightarrow\; b_{1,2}=-18\pm 30$$

$b_1=-48 \;\Rightarrow$ לא ייתכן, כי $b>0$

$$b_2=12 \;\Rightarrow\; a=12$$

תשובה: $C(0,9)$, $B(12,15)$, $A(12,0)$.

(2) (א) (i)

$$z=\frac{\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)^2}{\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^3}=\frac{\left[\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]^2}{\left[\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]^3}=\frac{\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{cis}\pi}=$$

$$=\operatorname{cis}\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}$$

$$|z|=1\ ,\ \arg z=\frac{\pi}{2}$$

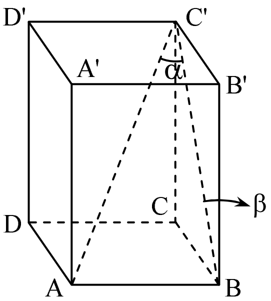
(ii)

$$z^{\mathrm{n}}=\left(\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}\right)^{\mathrm{n}}=\operatorname{cis}\frac{\pi\mathrm{n}}{2}=\cos\frac{\pi\mathrm{n}}{2}+i\sin\frac{\pi\mathrm{n}}{2}$$

$$z^{\mathrm{n}}=\mathrm{Im}\ \Rightarrow\ \mathrm{Re}(z)=0\ \Rightarrow\ \cos\frac{\pi\mathrm{n}}{2}=0$$

$$\frac{\pi\mathrm{n}}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi\mathrm{k}\ \Rightarrow\ \mathrm{n}=1+2\mathrm{k}$$

תשובה: n הוא מספר אי-זוגי כלשהו.



(ב) $\mathrm{C'B'}\perp\mathrm{AA'B'B}$, לכן $\mathrm{BB'}$ הוא
ההיטל של $\mathrm{C'B}$ על המישור $\mathrm{AA'B'B}$,
לכן: $\measuredangle\mathrm{B'BC'}=\beta$.

(i) ב- $\Delta\mathrm{BB'C'}$:

$$\sin\beta=\frac{\mathrm{B'C'}}{\mathrm{BC'}}$$

$$\mathrm{B'C'}=\mathrm{BC}=\mathrm{d}\sin\beta$$

$$\mathrm{BB'}=\mathrm{d}\cos\beta$$

$$\mathrm{AB}\perp\mathrm{BB'C'C}\ \Rightarrow\ \mathrm{AB}\perp\mathrm{BC'}$$

במשולש ישר זווית $\mathrm{ABC'}$:

$$\tan\alpha=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC'}}\ \Rightarrow\ \mathrm{AB}=\mathrm{d}\tan\alpha$$

$$\mathrm{V}=S_{\mathrm{ABCD}}\cdot\mathrm{BB'}=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{BB'}=\mathrm{d}\tan\alpha\cdot\mathrm{d}\sin\beta\cdot\mathrm{d}\cos\beta=$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{d}^3\tan\alpha\cdot\sin2\beta$$

(ii)

$$\mathrm{V}=428.2=\frac{1}{2}\mathrm{d}^3\tan42^\circ\cdot\sin72^\circ$$

$\mathrm{d}^3\approx1000\ \Rightarrow\ \mathrm{d}=10$ ס"מ

(3) נתון: $|\underline{u}|=|\underline{v}|=|\underline{w}|$, לכן הפירמידה היא ישרה.

כמו כן נסמן: $\measuredangle BAD=\measuredangle CAD=\measuredangle BAC=\alpha$, מכאן:

$\Delta BAC\cong\Delta CAD\cong\Delta DAB$ (לפי משפט חפיפה צ.ז.צ.),

מכאן נובע ש- $BC=CD=DB$, כלומר ΔBCD הוא משולש שווה-צלעות.

נסמן: $|\underline{u}|=|\underline{v}|=|\underline{w}|=a$.

מתקיים: $\underline{u}\cdot\underline{v}=\underline{u}\cdot\underline{w}=\underline{v}\cdot\underline{w}=a\cdot a\cdot\cos\alpha$

(א) צ"ל: $\underline{x}\perp BCD$, כלומר צריך להוכיח:

$$\begin{cases}\underline{x}\perp\overrightarrow{BD}\\ \underline{x}\perp\overrightarrow{BC}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(\underline{u}+\underline{v}+\underline{w})\cdot(\underline{w}-\underline{u})=0\\ (\underline{u}+\underline{v}+\underline{w})\cdot(\underline{v}-\underline{u})=0\end{cases}$$

אבל:

$$\begin{cases}\underline{u}\cdot\underline{w}-|\underline{u}|^2+\underline{v}\cdot\underline{w}-\underline{u}\cdot\underline{v}+|\underline{w}|^2-\underline{u}\cdot\underline{w}=-a^2\cos\alpha-a^2+a^2\cos\alpha-a^2\cos\alpha+a^2-a^2\cos\alpha=0\\ \underline{u}\cdot\underline{v}-|\underline{u}|^2+|\underline{v}|^2-\underline{v}\cdot\underline{u}+\underline{w}\cdot\underline{v}-\underline{u}\cdot\underline{w}=a^2\cos\alpha-a^2+a^2-a^2\cos\alpha+a^2\cos\alpha-a^2\cos\alpha=0\end{cases}$$

אם הוקטור $\underline{x}$ מאונך לשני וקטורים לא מקבילים במישור BCD

($\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BC}$), אז הוקטור $\underline{x}$ מאונך למישור BCD .

(ב) $\overrightarrow{BD}=\underline{w}-\underline{u}=(1,\sqrt{3},0)\;\Rightarrow\;D=B+\overrightarrow{BD}\;\Rightarrow\;D(1,\sqrt{3},0)$

$\overrightarrow{BC}=\underline{v}-\underline{u}=(2,0,0)\;\Rightarrow\;C=B+\overrightarrow{BC}\;\Rightarrow\;C(2,0,0)$

$A=B-\overrightarrow{AB}=B-\underline{u}\;\Rightarrow\;A\left(1,\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$

$|\underline{u}|=|\underline{v}|=|\underline{w}|=\sqrt{1+\frac{1}{3}+\frac{24}{9}}=\sqrt{\frac{12}{3}}=2$

$BD=DC=BD=|\overrightarrow{BC}|=2$

(i) וקטור נורמל למישור BCD הוא: $\underline{x}=\underline{u}+\underline{v}+\underline{w}$ (סעיף (א)).

$\underline{x}=\left(-1+1+0,-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3},-\frac{2\sqrt{6}}{3}-\frac{2\sqrt{6}}{3}-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)=$

$=\left(0,0,-2\sqrt{6}\right)$

המישור BCD : $0\cdot x+0\cdot y+2\sqrt{6}z+d=0$

המישור עובר דרך $B(0,0,0)$, לכן $d=0$ ונקבל: $BCD:\;z=0$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(*ii*) $AB = BC = AC = 2$, לכן ΔABC הוא משולש שווה-צלעות,
ו- $\measuredangle BAC = 60^\circ$.

(*iii*)
$$AD \, : \, x = A + \alpha \cdot \underline{w}$$
$$\underline{x} = \left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right) + \alpha\left(0, 1, -\sqrt{2}\right)$$
$$AC \, : \, x = A + \beta \cdot \underline{v}$$
$$\underline{x} = \left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right) + \beta\left(\sqrt{3}, -1, -2\sqrt{2}\right)$$

(*iv*) השטח של משולש שווה-צלעות BCD :

$$S = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \quad \Rightarrow \quad S_{\Delta BCD} = \frac{2^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \text{ יחידות שטח}$$

גובה הפירמידה הוא מרחק הנקודה A מהמישור BCD :

$$h = \frac{\left| 0 \cdot 1 + 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + 1 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{3} \right|}{1} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta BCD} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ יחידות נפח}$$

(4) (א) (i) נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ קיימות כאשר $f'(x)=0$ ומחליפה את סימנה. לפי הגרף והנתונים:

עבור $x<\mathrm{b}$ הפונקציה $f(x)$ עולה

ועבור $\mathrm{b}<x<0$ הפונקציה $f(x)$ יורדת, לכן: $\max(\mathrm{b},\mathrm{s})$.

עבור $\mathrm{b}<x<0$ הפונקציה $f(x)$ יורדת

ועבור $x>0$ הפונקציה $f(x)$ עולה, לכן: $\min(0,\mathrm{p})$.

(ii) נקודות פיתול של הפונקציה $f(x)$ קיימות כאשר $f''(x)=0$, כלומר כאשר $[f'(x)]'=0$, כלומר בנקודות הקיצון של $f'(x)$, כלומר בנקודה (c,q) :

עבור $x<\mathrm{c}$, $f'(x)$ יורדת, כלומר $f''(x)<0$,

לכן הפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מטה $\cap$ עבור $x<\mathrm{c}$.

עבור $x>\mathrm{c}$, $f'(x)$ עולה, כלומר $f''(x)>0$,

לכן הפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מעלה $\cup$ עבור $x>\mathrm{c}$.

(iii)
$$y-\mathrm{q}=f'(\mathrm{c})\cdot(x-\mathrm{c}) \quad\Rightarrow\quad y-\mathrm{q}=\mathrm{k}(x-\mathrm{c})$$
$$y=\mathrm{k}x+\mathrm{q}-\mathrm{kc}$$

(ב) $x_1=\mathrm{b}\ ,\ x_2=\mathrm{c}$

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{f'(x)}{e^{f(x)}}\,dx=\int_{\mathrm{b}}^{\mathrm{c}}\frac{f'(x)}{e^{f(x)}}\,dx$$

נסמן:
$$f(x)=t$$
$$f'(x)dx=dt \quad\Rightarrow\quad dx=\frac{dt}{f'(x)}$$
$$\int\frac{f'(x)}{e^{f(x)}}dx=\int\frac{f'(x)}{e^t}\cdot\frac{dt}{f'(x)}=\int\frac{dt}{e^t}=-e^{-t}+\mathrm{C}=-e^{-f(x)}+\mathrm{C}$$
$$\int_{\mathrm{b}}^{\mathrm{c}}\frac{f'(x)}{e^{f(x)}}\,dx=\left(-e^{-f(x)}\right)\Big|_{\mathrm{b}}^{\mathrm{c}}=-e^{-f(\mathrm{c})}+e^{-f(\mathrm{b})}=-e^{-\mathrm{q}}+e^{-\mathrm{s}}$$

(5) $f(x)=4^x-\mathrm{a}\cdot 2^x+\mathrm{b} \qquad g(x)=2^x-7$

$f(1)=-5\ ,\ f''(1)=0$

(א) לפונקציה $g(x)$ אין נקודות קיצון ואין נקודות פיתול, היא עולה לכל x .

$f(1)=-5 \ \Rightarrow\ 4-2\mathrm{a}+\mathrm{b}=-5 \quad (*)$

$f'(x)=4^x\cdot\ln 4-\mathrm{a}\cdot 2^x\cdot\ln 2$

$f''(x)=4^x\cdot\ln^2 4-\mathrm{a}\cdot 2^x\cdot\ln^2 2$

$f''(1)=0 \ \Rightarrow\ 4\ln^2 4-2\mathrm{a}\ln^2 2=0$

$4(2\ln 2)^2-2\mathrm{a}\ln^2 2=0 \ \Rightarrow\ 16\ln^2 2-2\mathrm{a}\ln^2 2=0$

$2\ln^2 2(8-\mathrm{a})=0$

$2\ln^2 2>0$, לכן: $8-\mathrm{a}=0 \ \Rightarrow\ \mathrm{a}=8$

נציב $\mathrm{a}=8$ ב- $(*)$ ונקבל: $4-2\cdot 8+\mathrm{b}=-5 \ \Rightarrow\ \mathrm{b}=7$

(ב) $f'(x)=0 \ \Rightarrow\ 4^x\cdot 2\ln 2-8\cdot 2^x\cdot\ln 2=0 \quad /:2\ln 2$

$2^x(2^x-4)=0$

$2^x=0 \ \Rightarrow$ לא ייתכן, כי $2^x>0$ לכל x

$2^x-4=0 \ \Rightarrow\ 2^x=4 \ \Rightarrow\ x=2$

$f(2)=4^2-8\cdot 2^2+7=-9 \ \Rightarrow\ (2,-9)$

x	x < 2	x = 2	x > 2
f'(x)	−	0	+
f(x)	↘	min	↗

$f'(1)=(+)\cdot(2^1-4)<0 \qquad f'(3)=(+)\cdot(2^3-4)>0$

תשובה: $\min(2,-9)$.

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(ג) נמצא את שיעורי נקודת החיתוך של הגרפים של $f(x)$ ו- $g(x)$:

$$2^x-7=4^x-8\cdot 2^x+7 \quad\Rightarrow\quad 4^x-9\cdot 2^x+14=0$$

$$(2^x)^2-9\cdot(2^x)+14=0 \quad\Rightarrow\quad (2^x)_{1,2}=\frac{9\pm 5}{2}$$

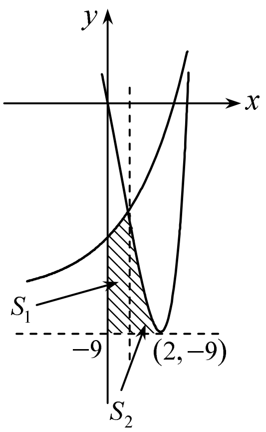
$$2^x=7 \quad\Rightarrow\quad x=\log_2 7$$

$$2^x=2 \quad\Rightarrow\quad x=1 \quad\Rightarrow\quad y=-5$$

$$\log_2 7>1 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{A}(1,-5)$$

משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת המינימום שלה :

$$y=y_{\min}=-9$$



$$S_1=\int_0^1[g(x)-y]\,dx=\int_0^1(2^x-7+9)\,dx=$$

$$=\int_0^1(2^x+2)\,dx=\left(\frac{2^x}{\ln 2}+2x\right)\Big|_0^1=$$

$$=\frac{2}{\ln 2}+2-\frac{1}{\ln 2}=\left(\frac{1}{\ln 2}+2\right)$$ יחידות שטח

$$S_2=\int_1^2[f(x)-y]\,dx=$$

$$=\int_1^2(4^x-8\cdot 2^x+7+9)\,dx=\int_1^2(4^x-8\cdot 2^x+16)\,dx=$$

$$=\left(\frac{4^x}{\ln 4}-8\cdot\frac{2^x}{\ln 2}+16x\right)\Big|_1^2=$$

$$=\frac{16}{\ln 4}-\frac{8\cdot 4}{\ln 2}+32-\left(\frac{4}{\ln 4}-\frac{16}{\ln 2}+16\right)=$$

$$=\frac{12}{\ln 4}-\frac{16}{\ln 2}+16=\frac{6}{\ln 2}-\frac{16}{\ln 2}+16=\left(16-\frac{10}{\ln 2}\right)$$ יחידות שטח

$$S_{\text{מבוקש}}=S_1+S_2=\frac{1}{\ln 2}+2+16-\frac{10}{\ln 2}=$$

$$=18-\frac{9}{\ln 2}\approx 5.02$$ יחידות שטח

גבי יקואל

משבצת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

◈ לכל הכיתות ◈ לכל השאלונים ◈ לכל הרמות