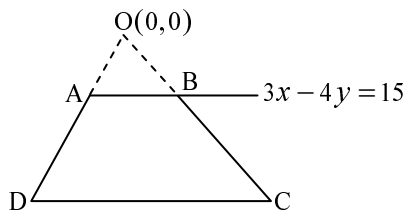


פתרון מבחן מס' 24 (ספר לימוד – שאלון 035807)



(1) (א) $AB \parallel DC$, לכן משוואת DC :

$$3x - 4y = C$$

גובה הטרפז (המרחק בין הבסיסים)

שווה ל-6, לכן :

$$\frac{|C-15|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 6 \Rightarrow |C-15| = 30$$

$$C-15=30 \Rightarrow C_1=45 \Rightarrow DC : 3x-4y=45$$

$$15-C=30 \Rightarrow C_2=-15 \Rightarrow DC : 3x-4y=-15$$

נמצא שיעורי נקודת החיתוך של AB ו-DC עם ציר ה-y :

$$AB : x=0 \Rightarrow -4y=15 \Rightarrow y=-\frac{15}{4}$$

$$DC : -4y_1=45 \Rightarrow y_1=-\frac{45}{4} \quad -4y_2=-15 \Rightarrow y_2=\frac{15}{4}$$

ראשית הצירים ו-DC צריכים להיות בצדדים שונים של AB,

לכן $C=-15$ לא מתאים לתנאי השאלה.

$$3x-4y=45$$

כלומר, $C=45$ ומשוואת DC :

$$x_C + y_C = 15, AB = BC \quad (b)$$

(i) נמצא את שיעורי הנקודה C :

$$+ \begin{cases} 3x-4y=45 \\ x+y=15 \end{cases} / \cdot 4 \Rightarrow 7x=105 \Rightarrow x=15 \Rightarrow y=0$$

כלומר $C(15,0)$.

$$m_{BC} = m_{OC} = 0$$

נמצא את משוואת BC (OC) :

$$y=0$$

נמצא את שיעורי הנקודה B :

$$y_B=0 \Rightarrow 3x_B=15 \Rightarrow x_B=5$$

מכאן : $B(5,0)$.

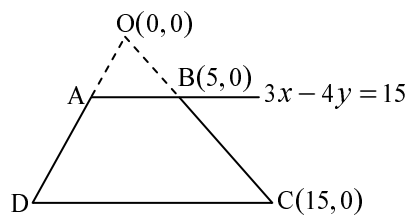
◀◀ המשך בעמוד הבא

$$B(5,0), C(15,0), BC = AB$$

$$R = BC = 15 - 5 = 10$$

משוואת מעגל העובר דרך הנקודות A ו-C ומרכזו B:

$$(x-5)^2 + y^2 = 100$$



(ii) נסמן: $A(t,p)$.

הנקודה A נמצאת על

הישר AB, לכן:

$$p = \frac{3}{4}t - \frac{15}{4}$$

הנקודה A נמצאת על מעגל

$$(t-5)^2 + p^2 = 100 \quad \text{לכן: שאת משוואתו מצאנו בסעיף קודם, לכן:}$$

$$(t-5)^2 + \left(\frac{3t-15}{4}\right)^2 = 100 \Rightarrow (t-5)^2 + \frac{9}{16}(t-5)^2 = 100$$

$$(t-5)^2 = 64 \Rightarrow t-5 = 8 \text{ או } t-5 = -8$$

$$t-5 = 8 \Rightarrow t_1 = 13 \Rightarrow p_1 = 6 \Rightarrow A_1(13,6)$$

$$t-5 = -8 \Rightarrow t_2 = -3 \Rightarrow p_2 = -6 \Rightarrow A_2(-3,-6)$$

עבור $A_1(13,6)$:

$$m = \frac{6-0}{13-0} = \frac{6}{13} \Rightarrow y = \frac{6}{13}x \quad \text{משוואת AD:}$$

$$\begin{cases} y = \frac{6}{13}x \\ 3x - 4y = 45 \end{cases} \Rightarrow 3x - \frac{24}{13}y = 45 \Rightarrow x = 39$$

$$y = \frac{6}{13} \cdot 39 = 18 \Rightarrow D_1(39,18)$$

עבור $A_2(-3,-6)$:

$$m = \frac{-6-0}{-3-0} = 2 \Rightarrow y = 2x \quad \text{משוואת AD:}$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ 3x - 4y = 45 \end{cases} \Rightarrow 3x - 8x = 45 \Rightarrow x = -9$$

$$y = 2 \cdot (-9) = -18 \Rightarrow D_2(-9,-18)$$

$$|x - 12 + i(y - 5)| = 3 \quad (i) \quad (2)$$

$$\sqrt{(x-12)^2 + (y-5)^2} = 3 \Rightarrow (x-12)^2 + (y-5)^2 = 9$$

המקום הגיאומטרי המבוקש הוא מעגל שמרכזו ב- (12, 5)

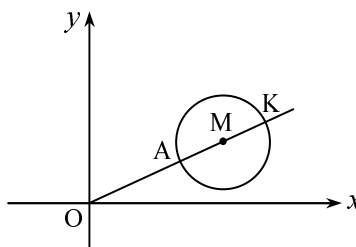
ורדיוסו 3.

$$OM = \sqrt{(12-0)^2 + (5-0)^2} = 13 \text{ יחידות אורך} \quad (ii)$$

לכן:

$$|z|_{\min} = OA = OM - AM = 13 - R = 13 - 3 = 10 \text{ יחידות אורך}$$

$$|z|_{\max} = OK = OM + MK = 13 + R = 13 + 3 = 16 \text{ יחידות אורך}$$



$$\arg(z - 4) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \arg(x - 4 + iy) = \frac{\pi}{4} \quad (i) \quad (b)$$

$$\frac{y}{x-4} = \tan \frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow y = x - 4$$

מציאת שיעורי הנקודות B ו- C ($x_C > x_B$):

$$\begin{cases} (x-12)^2 + (y-5)^2 = 9 \\ y = x - 4 \end{cases} \Rightarrow (x-12)^2 + (x-5-4)^2 = 9$$

$$x^2 - 24x + 144 + x^2 - 18x + 81 = 9$$

$$x^2 - 21x + 108 = 0 \Rightarrow x_1 = 12, x_2 = 9$$

$$x_1 = 12 \Rightarrow y_1 = 8 \Rightarrow (12, 8)$$

$$x_2 = 9 \Rightarrow y_2 = 5 \Rightarrow (9, 5)$$

$12 > 9$, לכן: B(9, 5), C(12, 8) . מכאן:

$$z_B = 9 + 5i, z_C = 12 + 8i$$

$$\frac{12 + 5i - z_C}{12 + 5i - z_B} = \frac{12 + 5i - 12 - 8i}{12 + 5i - 9 - 5i} = \frac{-3i}{3} = -i \quad (ii)$$

$$\arg(-i) = \frac{3\pi}{2}$$

$$AD = AB \Rightarrow |\underline{u}| = |\underline{v}| = a \quad (3) \text{ (א) נסמן:}$$

$$A'B = A'D \Rightarrow |\underline{u} - \underline{w}| = |\underline{v} - \underline{w}|$$

$$\sqrt{(\underline{u} - \underline{w}) \cdot (\underline{u} - \underline{w})} = \sqrt{(\underline{v} - \underline{w}) \cdot (\underline{v} - \underline{w})}$$

$$|\underline{u}|^2 - 2\underline{u} \cdot \underline{w} + |\underline{w}|^2 = |\underline{v}|^2 - 2\underline{v} \cdot \underline{w} + |\underline{w}|^2$$

$$-2\underline{u} \cdot \underline{w} = -2\underline{v} \cdot \underline{w} \Rightarrow \underline{u} \cdot \underline{w} = \underline{v} \cdot \underline{w}$$

$$|\underline{u}| \cdot |\underline{w}| \cdot \cos \sphericalangle A'AB = |\underline{v}| \cdot |\underline{w}| \cdot \cos \sphericalangle A'AD \quad \text{מכאן נובע ש-}$$

$$|\underline{u}| = |\underline{v}|, |\underline{w}| = |\underline{w}|$$

$$\cos \sphericalangle A'AD = \cos \sphericalangle A'AB \Rightarrow \sphericalangle A'AD = \sphericalangle A'AB = 60^\circ \quad \text{לכן:}$$

$$\overrightarrow{A'B} \cdot \overrightarrow{A'D} = 16 \Rightarrow (\underline{u} - \underline{w}) \cdot (\underline{v} - \underline{w}) = 16 \quad (ב)$$

$$\underline{u} \cdot \underline{v} - \underline{u} \cdot \underline{w} - \underline{v} \cdot \underline{w} + |\underline{w}|^2 = 16$$

$$|\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos 60^\circ - 2\underline{u} \cdot \underline{w} + |\underline{w}|^2 = 16$$

$$\frac{a^2}{2} - 2a|\underline{w}| \cdot \cos 60^\circ + |\underline{w}|^2 = 16$$

$$\frac{a^2}{2} - a|\underline{w}| + |\underline{w}|^2 = 16 \quad (*)$$

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin \sphericalangle DAB \Rightarrow 32\sqrt{3} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \sin 60^\circ$$

$$32\sqrt{3} = a \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a^2 = 64 \Rightarrow a = \pm 8, a > 0 \Rightarrow a = 8$$

$$\frac{64}{2} - 8 \cdot |\underline{w}| + |\underline{w}|^2 = 16 \quad \text{נציב ב- (*) ונקבל:}$$

$$|\underline{w}|^2 - 8|\underline{w}| + 16 = 0 \Rightarrow (|\underline{w}|^2 - 4) = 0 \Rightarrow |\underline{w}| = 4$$

המשך בעמוד הבא <<<

$$\cos \sphericalangle BA'D = \frac{\vec{A'B} \cdot \vec{A'D}}{|\vec{A'B}| \cdot |\vec{A'D}|} = \quad (ג)$$

$$= \frac{16}{\sqrt{(\underline{u} - \underline{w}) \cdot (\underline{u} - \underline{w})} \cdot \sqrt{(\underline{v} - \underline{w}) \cdot (\underline{v} - \underline{w})}} =$$

$$= \frac{16}{\sqrt{|\underline{u}|^2 + |\underline{w}|^2 - 2|\underline{u}||\underline{w}| \cos 60^\circ} \cdot \sqrt{|\underline{v}|^2 + |\underline{w}|^2 - 2|\underline{v}||\underline{w}| \cos 60^\circ}} =$$

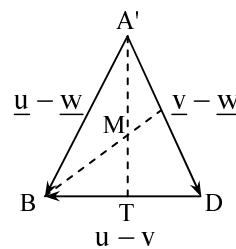
$$= \frac{16}{\sqrt{64 + 16 - 8 \cdot 4} \cdot \sqrt{64 + 16 - 8 \cdot 4}} = \frac{16}{48} = \frac{1}{3}$$

$$\vec{A'M} = \frac{2}{3} \vec{A'T} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (\vec{A'B} + \vec{A'D}) = \quad (i) \quad (ד)$$

$$= \frac{1}{3}(\underline{u} - \underline{w} + \underline{v} - \underline{w}) = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} - \frac{2}{3}\underline{w}$$

$$\vec{AM} = \vec{AA'} + \vec{A'M} =$$

$$= \underline{w} + \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} - \frac{2}{3}\underline{w} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}$$



$$\vec{AC'} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CC'} = \underline{u} + \underline{v} + \underline{w} \quad (ii)$$

$$\vec{AC'} \stackrel{?}{=} \alpha \cdot \vec{AM} \Rightarrow \underline{u} + \underline{v} + \underline{w} = \frac{1}{3}\alpha(\underline{u} + \underline{v} + \underline{w})$$

כלומר $AC' \parallel AM$ ויש להם נקודה משותפת A,

ולכן הנקודות A, M ו-C' נמצאות על אותו ישר.

$$\cos \sphericalangle A'AM = \frac{\vec{AA'} \cdot \vec{AM}}{|\vec{AA'}| \cdot |\vec{AM}|} = \frac{\underline{w} \cdot \frac{1}{3}(\underline{u} + \underline{v} + \underline{w})}{|\underline{w}| \cdot \frac{1}{3}|\underline{u} + \underline{v} + \underline{w}|} = \quad (ה)$$

$$= \frac{\underline{u} \cdot \underline{w} + \underline{v} \cdot \underline{w} + |\underline{w}|^2}{4\sqrt{(\underline{u} + \underline{v} + \underline{w}) \cdot (\underline{u} + \underline{v} + \underline{w})}} =$$

$$= \frac{8 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} + 8 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} + 4^2}{4\sqrt{|\underline{u}|^2 + |\underline{v}|^2 + |\underline{w}|^2 + 2\underline{u} \cdot \underline{v} + 2\underline{u} \cdot \underline{w} + 2\underline{v} \cdot \underline{w}}} =$$

$$= \frac{16 + 16 + 16}{4\sqrt{64 + 64 + 16 + 2 \cdot 32 + 2 \cdot 16 + 2 \cdot 16}} = \frac{48}{4\sqrt{272}}$$

מכאן: $\sphericalangle A'AM \approx 43.31^\circ$.

(4) (א) אחרי 4 שנים, ערך המכונת יורד ב- 34.39%, ולכן נשאר
 $100\% - 34.39\% = 65.61\%$ מערכה ההתחלתי, ואז:
 $0.6561M_0 = M_0 \cdot q^4 \Rightarrow q = \sqrt[4]{0.6561} = 0.9$

כלומר ירידה של 10% בשנה.

מכאן נקבל שערך מכונת ב' יורד ב- 12% כל שנה.

נסמן את מחירה ההתחלתי של מכונת א' ב- x , ואז $1.2x$ יסמן

את מחירה ההתחלתי של מכונת ב'.

מהשאלה נקבל את המשוואה

$$x \cdot 0.9^t = 1.2x \cdot 0.88^t \quad (t - \text{כמה שנים לאחר הקנייה נמכרו המכונות}):$$

$$\left(\frac{0.9}{0.88}\right)^x = 1.2 \Rightarrow x = \frac{\ln 1.2}{\ln \frac{90}{88}} = 8.11 \text{ שנים}$$

(ב) נמצא מהו מיקום הנקודה A עבורו שטח המלבן ABOC הוא מקסימלי.

נסמן: $x_A = t$ ואז: $y_A = e^{-a\sqrt{t}}$.

פונקציית המטרה – שטח המלבן:

$$S = x_A \cdot y_A$$

$$S(t) = t \cdot e^{-a\sqrt{t}}$$

$$S'(t) = 1 \cdot e^{-a\sqrt{t}} + t \cdot e^{-a\sqrt{t}} \cdot \left(-\frac{a}{2\sqrt{t}}\right) = e^{-a\sqrt{t}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}a\sqrt{t}\right)$$

$$S'(t) = 0 \Rightarrow e^{-a\sqrt{t}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}a\sqrt{t}\right) = 0$$

$e^{-a\sqrt{t}} > 0$ לכל ערך של t , לכן:

$$1 - \frac{1}{2}a\sqrt{t} = 0 \Rightarrow \sqrt{t} = \frac{2}{a} \Rightarrow t = \frac{4}{a^2}$$

t	$0 < t < \frac{4}{a^2}$	$t = \frac{4}{a^2}$	$t > \frac{4}{a^2}$
$S'(t)$	+	0	-
$S(t)$	↗	max	↘

$$S'\left(\frac{1}{a^2}\right) = (+) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{a}\right) > 0, \quad S'\left(\frac{9}{a^2}\right) = (+) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}a \cdot \frac{3}{a}\right) < 0$$

עבור $t = \frac{4}{a^2}$ שטח המלבן הוא מקסימלי ושווה ל- $\frac{1}{4e^2}$.

$$\frac{4}{a^2} \cdot e^{-a \cdot \sqrt{\frac{4}{a^2}}} = \frac{1}{4e^2} \Rightarrow \frac{4}{a^2} \cdot e^{-2} = \frac{1}{4} \cdot e^{-2}$$

$$a = \pm 4 > 0 \Rightarrow a = 4$$

(5) (א) תחום הגדרה: כל x (השורש הוא מסדר אי-זוגי).

(ב) שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y :

$$x=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow (0,0)$$

שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x :

$$y=0 \Rightarrow x(x+1)\sqrt[3]{x^2} = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = -1 \Rightarrow (0,0), (-1,0)$$

לכן נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים: $(0,0), (-1,0)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= [(x^2 + x) \cdot \sqrt[3]{x^2}]' = (x^{\frac{8}{3}} + x^{\frac{5}{3}})' = \frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}} + \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} = & (ג) \\ &= \frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}(8x + 5) \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}(8x + 5) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -\frac{5}{8}$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 0 \Rightarrow (0,0)$$

$$x_2 = -\frac{5}{8} \Rightarrow y_2 \approx -0.171 \Rightarrow (-0.625, -0.171)$$

x	$x < -0.625$	$x = -0.625$	$-0.625 < x < 0$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	min	↗

x	$x = 0$	$x > 0$
$f'(x)$		+
$f(x)$		↗

$$f'(-1) = (+)(-8 + 5) < 0$$

$$f'(-\frac{1}{2}) = (+) \cdot (-4 + 5) > 0$$

$$f'(1) = (+)(8 + 5) > 0$$

כלומר: $\min(-0.625, -0.171)$.

◀◀◀ המשך בעמוד הבא

$$f'''(x) = \frac{1}{3}(8x^{\frac{5}{3}} + 5x^{\frac{2}{3}})' = \frac{1}{3}(8 \cdot \frac{5}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}} + 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}}) = \quad (ה) + (ד)$$

$$= \frac{5}{9} \cdot x^{-\frac{1}{3}}(8x + 2) = \frac{10}{9\sqrt[3]{x}}(4x + 1)$$

הנגזרת השנייה שווה ל-0 או לא קיימת בנקודות:

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0, 0)$$

$$x = -\frac{1}{4} \Rightarrow y = \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{4}\right)^3 \sqrt[3]{\frac{1}{16}} \approx -0.074 \Rightarrow (-0.25, -0.074)$$

$$f'''(-1) = (-)(-4 + 1) > 0$$

$$f'''(-\frac{1}{8}) = (-)(-\frac{1}{2} + 1) < 0$$

$$f'''(1) = (+)(4 + 1) > 0$$

מכיוון שהנגזרת השנייה משנה את סימנה סביב $x = 0$ וסביב $x = -\frac{1}{4}$,

הרי שהנקודות $(0, 0)$, $(-0.25, -0.074)$ הן נקודות הפיתול

של הפונקציה.

כמו כן: הפונקציה קעורה כלפי מעלה \cup עבור $x > 0$, $x < -\frac{1}{4}$,

וקעורה כלפי מטה \cap עבור $-\frac{1}{4} < x < 0$.

(ו) ראו פתרון הסעיף בספר הבחינות, עמוד 1,151.

$$x = -1 \Rightarrow y = (1-1)\sqrt[3]{1} = 0 \quad (i) \quad (ז)$$

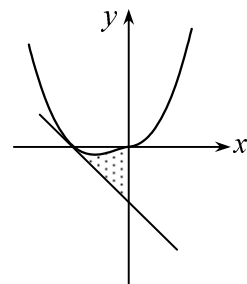
$$f'(-1) = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot (-8 + 5) = -1$$

$$y - 0 = -1 \cdot (x + 1) \Rightarrow y = -x - 1 \quad \text{משוואת המשיק:}$$

$$S = \int_{-1}^0 [f(x) - y] dx = \int_{-1}^0 [x^{\frac{8}{3}} + x^{\frac{5}{3}} + x + 1] dx = \quad (ii)$$

$$= \left(\frac{3}{11} x^{\frac{11}{3}} + \frac{3}{8} x^{\frac{8}{3}} + \frac{1}{2} x^2 + x \right) \Big|_{-1}^0 =$$

$$= 0 - \left(-\frac{3}{11} + \frac{3}{8} + \frac{1}{2} - 1 \right) = \text{יחידת שטח} \quad \frac{35}{88}$$



גבי יקואל

מ ש ב צ ת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

לכל הכיתות ✦ לכל השאלונים ✦ לכל הרמות