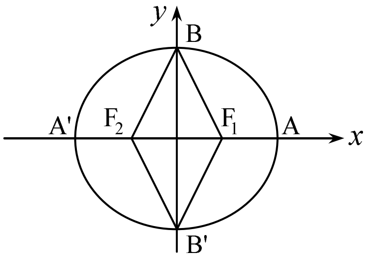
פתרון מבחן מס' 22 (ספר לימוד – שאלון 035807)



(1) (א) $BF_1 = BF_2 = a$, $BF_1 = \sqrt{45}$

מכאן: $a = \sqrt{45}$.

$$S_{\text{מעוין}} = \sqrt{45} \cdot \frac{12}{\sqrt{5}} = 36 \text{ יחידות שטח}$$

$$S_{\text{מעוין}} = \frac{BB' \cdot F_1F_2}{2} = \frac{2b \cdot 2c}{2} = 2b\sqrt{a^2 - b^2}$$

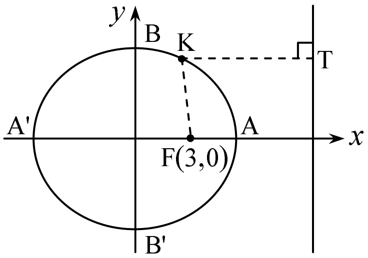
$$2b\sqrt{45 - b^2} = 36 \quad \Rightarrow \quad b\sqrt{45 - b^2} = 18$$

$$b^2(45 - b^2) = 324 \quad \Rightarrow \quad (b^2)^2 - 45b^2 + 324 = 0$$

$$(b^2)_{1,2} = \frac{45 \pm 27}{2} \quad \Rightarrow \quad b^2{}_1 = 36 \ , \ b^2{}_2 = 9$$

הפתרון $b^2{}_2 = 9$ נפסל כי נתון $b > 3$.

תשובה: משוואת האליפסה: $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{36} = 1$.



(ב) K נקודה כלשהי על האליפסה.

צ"ל: $KF = \frac{\sqrt{5}}{5} KT$. נסמן: $K(t,p)$.

$$KF = \sqrt{(3-t)^2 + p^2}$$

$$KT = 15 - x_K = 15 - t$$

$$\sqrt{(3-t)^2 + p^2} \stackrel{?}{=} \frac{\sqrt{5}}{5}(15 - t) \quad ①$$

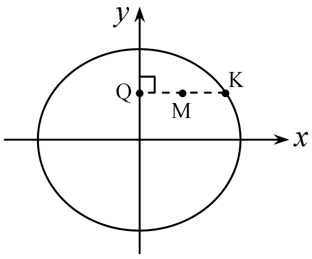
$$9 - 6t + t^2 + p^2 \stackrel{?}{=} \tfrac{1}{5}(225 - 30t + t^2)$$

$$45 - 30t + 5t^2 + 5p^2 \stackrel{?}{=} 225 - 30t + t^2$$

$$4t^2 + 5p^2 \stackrel{?}{=} 180 \quad \Rightarrow \quad \frac{t^2}{45} + \frac{p^2}{36} \stackrel{?}{=} 1 \quad ②$$

נתון שהנקודה K נמצאת על האליפסה, לכן שיעוריה מקיימים את משוואת האליפסה, לכן שוויון ② נכון ולכן גם שוויון ① נכון.

המשך בעמוד הבא ◄◄◄



(ג) K נקודה כלשהי על האליפסה.

ציר ה- y $KQ \perp$, $QM = MK$.

יש למצוא את המקום הגאומטרי

של הנקודות M . נסמן $M(a,b)$.

$$x_K = 2x_M = 2a \ , \ y_K = y_M = b \ \Rightarrow \ K(2a,b)$$

הנקודה K נמצאת על האליפסה הנתונה, לכן שיעוריה מקיימים

את משוואת האליפסה: $\frac{4a^2}{45} + \frac{b^2}{36} = 1 \ \Rightarrow \ \frac{x^2}{11.25} + \frac{y^2}{36} = 1$

(2) $BM = MA \ , \ BC = 4 \cdot CN \ , \ \overrightarrow{BM} = \underline{v} \ , \ \overrightarrow{CN} = \underline{u}$

(א) $\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CB} \ , \ AN = 5 \cdot ND$

$$\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CN} = 4\,\overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CN} = 3\,\overrightarrow{CN} = 3\underline{u}$$

$$\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BA} = 3\underline{u} + 2\underline{v}$$

נמצא את $\overrightarrow{ND}$: $\overrightarrow{ND} = \frac{1}{5}\overrightarrow{NA} = \frac{1}{5}(3\underline{u} + 2\underline{v}) = \frac{3}{5}\underline{u} + \frac{2}{5}\underline{v}$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{ND} = \underline{u} + \frac{3}{5}\underline{u} + \frac{2}{5}\underline{v} = \frac{8}{5}\underline{u} + \frac{2}{5}\underline{v}$$

(ב) $\overrightarrow{CM} = \alpha \cdot \overrightarrow{CD} \ \Rightarrow \ 4\underline{u} + \underline{v} = \alpha \cdot \left(\frac{8}{5}\underline{u} + \frac{2}{5}\underline{v}\right)$

$$4\underline{u} + \underline{v} = \frac{8\alpha}{5}\underline{u} + \frac{2\alpha}{5}\underline{v}$$

$$\begin{cases} \frac{8\alpha}{5} = 4 \\ \frac{2\alpha}{5} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{5}{2} \\ \alpha = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \ \alpha = \frac{5}{2}$$

$$\frac{CM}{CD} = \frac{5}{2} \ \Rightarrow \ \frac{MD}{DC} = \frac{3}{2} \ , \ \frac{CD}{DM} = \frac{2}{3}$$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(ג) נסמן: $S_{\Delta CDN} = A$.

$$\frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta CDN}} = \frac{AD}{DN} = \frac{4}{1} \quad \Rightarrow \quad S_{\Delta ACD} = 4A$$

$$\frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta ADM}} = \frac{CD}{DM} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad S_{\Delta ADM} = \frac{3}{2} S_{\Delta ACD} = \frac{3}{2} \cdot 4A = 6A$$

$$S_{\Delta ACM} = S_{\Delta ACD} + S_{\Delta ADM} = 4A + 6A = 10A$$

התיכון CM מחלק את ΔABC לשני משולשים שווי-שטח, לכן:

$$S_{\Delta BCM} = S_{\Delta ACM} = 10A$$

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ACM} + S_{\Delta BCM} = 10A + 10A = 20A$$

$$\frac{S_{\Delta ADC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{4A}{20A} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

(ד) (i) הקטעים AN ו- CM נחתכים, לכן למערכת הבאה חייב להיות פתרון:

$$\begin{cases} 1 + t = 8 + 2r \\ 1 - t = k + r \\ -2 + tk = 1 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{3}{k} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 1 + \frac{3}{k} = 8 + 2r \\ 1 - \frac{3}{k} = k + r \quad / \cdot (-2) \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 1 + \frac{3}{k} = 8 + 2r \\ -2 + \frac{6}{k} = -2k - 2r \end{cases} \quad \Rightarrow \quad -1 + \frac{9}{k} = 8 - 2k \quad \Rightarrow \quad \frac{9}{k} = 9 - 2k$$

$$2k^2 - 9k + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = \frac{9 \pm 3}{4} \quad \Rightarrow \quad k_1 = 3 \ , \ k_2 = 1.5$$

הפתרון $k_2 = 1.5$ נפסל כי נתון ש- k הוא מספר שלם.

תשובה: $k = 3$.

(ii) $$k = 3 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{3}{k} = \frac{3}{3} = 1$$

שיעורי הנקודה D :

$$(1,1,-2) + 1 \cdot (1,-1,3) = (1,1,-2) + (1,-1,3) \quad \Rightarrow \quad D(2,0,1)$$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(*iii*)
$$\cos \measuredangle ADM = \frac{|\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{NA}|}{|\overrightarrow{CM}| \cdot |\overrightarrow{NA}|} = \frac{|(2,1,0) \cdot (-1,1,-3)|}{\sqrt{2^2+1^2+0^2} \cdot \sqrt{1^2+1^2+3^2}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{11}} = \frac{1}{\sqrt{55}}$$
$$\cos \measuredangle ADM = \frac{1}{\sqrt{55}} \quad \Rightarrow \quad \measuredangle ADM \approx 82.25°$$

(*iv*) משוואת מישור ABC :
$$ax + by + cz + d = 0 \quad (*)$$

הוקטור (a,b,c) מאונך למישור, לכן הוא מאונך ל- $\overrightarrow{CM}$

וגם ל- $\overrightarrow{AN}$:

$$\begin{cases} (a,b,c) \cdot (2,1,0) = 0 \\ (a,b,c) \cdot (1,-1,3) = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ a - b + 3c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -2a \\ a + 2a + 3c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -a \end{cases}$$

נציב ב- $(*)$ ונקבל:
$$ax - 2ay - az + d = 0$$

הנקודה $D(2,0,1)$ נמצאת במישור ABC , לכן שיעוריה

מקיימים את משוואת המישור:
$$2a - 2a \cdot 0 - a + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = -a$$

משוואת המישור ABC :
$$x - 2y - z - 1 = 0$$

(*v*) משוואת המישורים המקבילים למישור ABC :
$$x - 2y - z + d = 0$$
$$\frac{|d+1|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} = 2\sqrt{6} \quad \Rightarrow \quad |d+1| = 12$$
$$d+1 = 12 \quad \Rightarrow \quad d = 11 \quad \Rightarrow \quad x - 2y - z + 11 = 0$$
$$d+1 = -12 \quad \Rightarrow \quad d = -13 \quad \Rightarrow \quad x - 2y - z - 13 = 0$$

(3) $z^3-4(1-i)z^2+16(1-i)z+64i=0$

(א) **(i)** $z_1=-4i$

$(-4i)^3-4(1-i)\cdot(-4i)^2+16(1-i)\cdot(-4i)+64i=$

$=64i+64(1-i)+16(-4-4i)+64i=$

$=64i+64-64i-64-64i+64i=0$

הצבת z_1 במשוואה נותנת פסוק אמת, לכן z_1 הוא שורש המשוואה הנתונה.

(ii) $z_2=2+2\sqrt{3}\,i \;\Rightarrow\; r_2=\sqrt{4+4\cdot3}=4$

$\tan\theta_2=\frac{2\sqrt{3}}{2} \;\Rightarrow\; \theta_2=60° \;\Rightarrow\; z_2=4\operatorname{cis}60°$

$z_3=2-2\sqrt{3}\,i=\overline{z}_2=4\operatorname{cis}(-60°)$

$z_k=\left(\frac{z_2}{8}\right)^k-\left(\frac{z_3}{8}\right)^k=\left(\frac{1}{2}\operatorname{cis}60°\right)^k-\left[\frac{1}{2}\operatorname{cis}(-60°)\right]^k=$

$=\frac{1}{2^k}\operatorname{cis}60°k-\frac{1}{2^k}\operatorname{cis}(-60°k)=$

$=\frac{1}{2^k}[\cos60°k+i\sin60°k-(\cos60°k-i\sin60°k)]=$

$=\frac{1}{2^k}(\cos60°k+i\sin60°k-\cos60°k+i\sin60°k)=$

$=\frac{1}{2^k}\cdot2i\cdot\sin60°k=\frac{i}{2^{k-1}}\sin60°k$

$z_{2,010}=\frac{i}{2^{2,010-1}}\cdot\sin(60°\cdot2,010)=\frac{i}{2^{2009}}\sin120,600°=$

$=\frac{i}{2^{2009}}\sin(335\cdot360°)=\frac{i}{2^{2009}}\sin0=0$

(ב) **(i)** $z_C=\frac{3}{2}z_A+z_B=\frac{3}{2}(2+2\sqrt{3}\,i)+2-2\sqrt{3}\,i=$

$=3+3\sqrt{3}\,i+2-2\sqrt{3}\,i=5+\sqrt{3}\,i$

תשובה: $C(5,\sqrt{3})$.

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{2 - 2\sqrt{3}\,i - 5 - \sqrt{3}\,i}{2 + 2\sqrt{3}\,i - 5 - \sqrt{3}\,i} = \frac{-3 - 3\sqrt{3}\,i}{-3 + \sqrt{3}\,i} \cdot \frac{-3 - \sqrt{3}\,i}{-3 - \sqrt{3}\,i} =$$ (*ii*)

$$= \frac{9 - 3\sqrt{3}\,i + 9\sqrt{3}\,i - 9}{9 + 3} = \frac{6\sqrt{3}\,i}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,i = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{cis}90^\circ$$

תשובה: $\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = 90^\circ$.

(*iii*) $A(2, 2\sqrt{3})$, $B(2, -2\sqrt{3})$, $C(5, \sqrt{3})$

$$AB = \sqrt{0^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{48}$$

$$BC = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{36}$$

$$AC = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12}$$

קיבלנו ש- $AB^2 = BC^2 + AC^2$ ($36 + 12 = 48$),

לכן המשולש הוא ישר-זווית ($\measuredangle C = 90^\circ$).

(4) (א) נסמן ב- x שנים את הזמן שנשארו מכמות מסוימת של החומר

90% ממנו. כלומר: $0.9M_0 = M_0 \cdot q^x \quad \Rightarrow \quad q^x = 0.9$

וגם מתקיים: $0.85M_0 = M_0 \cdot q^{x+1}$

ואז: $0.85 = q^{x+1} \quad \Rightarrow \quad 0.85 = q^x \cdot q$

$$0.85 = 0.9 \cdot q \quad \Rightarrow \quad q = \tfrac{17}{18}$$

$$0.2M_0 = M_0 \cdot \left(\tfrac{17}{18}\right)^y \quad \Rightarrow \quad y = \frac{\ln 0.2}{\ln\frac{17}{18}} \approx 28.16$$

תשובה: 28.16 שנים מהרגע ההתחלתי, יישארו 20%

מהכמות ההתחלתית של החומר.

המשך בעמוד הבא >>>

ב) $f(x)=g(x) \ \Rightarrow \ \sqrt{\frac{x}{x^2+7}}=\frac{\sqrt{x}}{4} \ \Rightarrow \ \frac{x}{x^2+7}=\frac{x}{16}$

מכאן נקבל: $x_1=0 \ , \ x_2=3$

$f(1)=\sqrt{\frac{1}{8}} \ , \ g(1)=\frac{1}{4}=\sqrt{\frac{1}{16}} \ \Rightarrow \ f(1)>g(1)$

לכן בתחום $[0,3]$ גרף הפונקציה $f(x)$

נמצא מעל גרף הפונקציה $g(x)$.

$$\mathrm{V}=\pi\cdot\int_0^3[f^2(x)-g^2(x)]dx=\pi\cdot\int_0^3\left(\frac{x}{x^2+7}-\frac{x}{16}\right)dx=$$

$$=\pi\cdot\left[\tfrac{1}{2}\ln(x^2+7)-\frac{x^2}{32}\right]\Big|_0^3=\pi\cdot\left[\tfrac{1}{2}(\ln 16-\ln 7)-\tfrac{1}{32}(9-0)\right]=$$

$$=\pi\cdot\left(\ln\frac{4}{\sqrt{7}}-\frac{9}{32}\right)\approx 0.415 \text{ יחידות נפח}$$

(5) תחום ההגדרה של $f(x)=(x^2+\mathrm{a})e^{-x}$ הוא: כל x .

א) $f'(x)=2xe^{-x}-e^{-x}(x^2+\mathrm{a})=e^{-x}(2x-x^2-\mathrm{a})$

$f'(x)=0 \ \Rightarrow \ x^2-2x+\mathrm{a}=0$

כדי שלמשוואה יהיו שני פתרונות ממשיים, נדרוש: $\Delta>0$

$4-4\mathrm{a}>0 \ \Rightarrow \ \mathrm{a}<1$

ב) אם $\mathrm{a}<1$, אז: $f'(x)=0 \ \Rightarrow \ x_{1,2}=1\pm\sqrt{1-\mathrm{a}}$

בנקודה שבה $x=1-\sqrt{1-\mathrm{a}}$ יש לפונקציה נקודת מינימום

($f'(x)$ מחליפה את סימנה מ- $-$ ל- $+$),

בנקודה שבה $x=1+\sqrt{1-\mathrm{a}}$ יש לפונקציה נקודת מקסימום

($f'(x)$ מחליפה את סימנה מ- $+$ ל- $-$).

ג) $1+\sqrt{1-\mathrm{a}}=2.5 \ \Rightarrow \ \sqrt{1-\mathrm{a}}=1.5$

$1-\mathrm{a}=2.25 \ \Rightarrow \ \mathrm{a}=-1.25$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

ד) $f(x)=\left(x^2-\frac{5}{4}\right)e^{-x}\ ,\ f'(x)=-e^{-x}\left(x^2-2x-\frac{5}{4}\right)$

שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y :

$$x=0 \Rightarrow y=\left(0-\frac{5}{4}\right)e^0=-\frac{5}{4} \Rightarrow \left(0,-\frac{5}{4}\right)$$

שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x :

$$y=0 \Rightarrow x^2-\frac{5}{4}=0 \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \left(\pm\frac{\sqrt{5}}{2},0\right)$$

שיעורי נקודות קיצון: $f'(x)=0 \Rightarrow x=1-1.5=-0.5$

$$y=\left(\frac{1}{4}-\frac{5}{4}\right)e^{0.5}=-\sqrt{e} \Rightarrow \min\left(-\frac{1}{2},-\sqrt{e}\right)$$

$$x=1+1.5=2.5$$

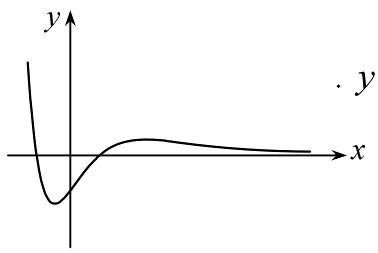
$$y=(6.25-1.25)e^{-2.5} \Rightarrow \max\left(2.5,\frac{5}{e^{2.5}}\right)$$

ה) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-\frac{5}{4}\right)e^{-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-\frac{5}{4}}{e^x}=0$

(פונקציה מעריכית גדלה מהר יותר מפונקציית חזקה)

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^2-\frac{5}{4}\right)e^{-x}=(\infty\cdot\infty)=\infty$$

משוואת אסימפטוטה אופקית ימנית: $y=0$.



גבי יקואל