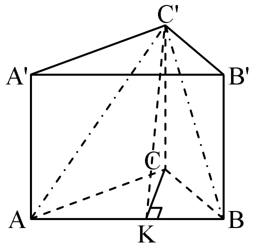
פתרון מבחן מס' 21 (ספר לימוד – שאלון 035807)



(1) נעביר $CK \perp AB$.

לפי המשפט על שלושה אנכים, נקבל: $C'K \perp AB$,

כלומר: $\measuredangle C'KC = \gamma$.

לפי משפט הסינוסים ב- ΔABC :

$$\frac{AB}{\sin\measuredangle C} = \frac{AC}{\sin\measuredangle B} \Rightarrow \frac{a}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{AC}{\sin\alpha} \Rightarrow AC = \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{a^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$$

את שטח ΔABC אפשר לחשב גם כך:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot CK}{2} = \frac{a \cdot CK}{2}$$

מכאן:

$$\frac{a \cdot CK}{2} = \frac{a^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)} \Rightarrow CK = \frac{a \cdot \sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

במשולש ישר-זווית $C'CK$:

$$\tan\measuredangle C'KC = \frac{C'C}{CK}$$

$$\tan\gamma = \frac{C'C \cdot \sin(\alpha+\beta)}{a\sin\alpha\sin\beta} \Rightarrow C'C = \frac{a \cdot \sin\alpha\sin\beta \cdot \tan\gamma}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$V = S_{\Delta ABC} \cdot C'C = \frac{a^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)} \cdot \frac{a \cdot \sin\alpha\sin\beta \cdot \tan\gamma}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{a^3\sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta \cdot tg\gamma}{2\sin^2(\alpha+\beta)}$$

(2) (א) נסמן $P(t,p)$.

$\measuredangle OAC = \measuredangle PBC$ (זוויות מתחלפות בין מקבילים שוות זו לזו)

$AC = CB$ (נתון)

$\measuredangle ACO = \measuredangle BCP$ (זוויות קדקדיות שוות זו לזו)

$\Downarrow$

$\Delta ACO \cong \Delta BCP$ (לפי משפט חפיפה ז.צ.ז.)

$\Downarrow$

$OC = CP$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

קיבלנו שהנקודה C היא אמצע הקטע OP, לכן:

$$x_C=\frac{x_O+x_P}{2}=\frac{0+t}{2}=\frac{t}{2}$$

$$y_C=\frac{y_O+y_P}{2}=\frac{0+p}{2}=\frac{p}{2}$$

הנקודה C היא אמצע AB, ו-

$$x_A=x_C=x_B=\frac{t}{2}$$

$$y_C=\frac{y_B+y_A}{2} \quad\Rightarrow\quad y_A=2\cdot\frac{p}{2}-0=p$$

הנקודה $A\left(\frac{t}{2},p\right)$ נמצאת על המעגל הנתון, לכן שיעוריה מקיימים

את משוואת המעגל:

$$\left(\frac{t}{2}\right)^2+p^2=25$$

$$\frac{t^2}{100}+\frac{p^2}{25}=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1 \quad (x\neq 0)$$

(ב)

$$a^2=100 \quad\Rightarrow\quad a=10$$

$$b^2=25 \quad\Rightarrow\quad b=5$$

כלומר שיעורי נקודות החיתוך של האליפסה שמצאנו בסעיף (א)

עם הצירים הם: $A(10,0)$, $A'(-10,0)$, $B(0,5)$, $B'(0,-5)$

במרובע $ABA'B'$ האלכסונים מאונכים זה לזה, לכן:

$$S_{ABA'B'}=\frac{AA'\cdot BB'}{2}=\frac{20\cdot 10}{2}=100 \text{ יחידות שטח}$$

(3) (א)

$$\overrightarrow{BA}=(k+2,0,1)\ ,\ \overrightarrow{BC}=(2,k-2,-3)$$

נבדוק האם קיים α כך ש-

$$\overrightarrow{BA}=\alpha\cdot\overrightarrow{BC}$$

$$\begin{cases} k+2=2\alpha \\ 0=\alpha(k-2) \\ 1=-3\alpha \quad\Rightarrow\quad \alpha=-\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k+2=-\frac{2}{3} \\ k-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=-\frac{8}{3} \\ k=2 \end{cases}$$

למערכת אין פתרון, לכן הנקודות A , B , C אינן נמצאות על ישר אחד.

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(ב) נתון: $S(k-2,k+1,-k)$.

$\overrightarrow{CS}=(k-2,2,2-k)$

$\overrightarrow{CS}\perp ABC$, לכן: $\overrightarrow{CS}\perp\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CS}\perp\overrightarrow{BA}$.

$\overrightarrow{CS}\perp\overrightarrow{BA}\ \Rightarrow\ \overrightarrow{CS}\cdot\overrightarrow{BA}=0$

$(k-2,2,2-k)\cdot(k+2,0,1)=0\ \Rightarrow\ k^2-4+2-k=0$

$k^2-k-2=0\ \Rightarrow\ k_1=2\ ,\ k_2=-1$

$\overrightarrow{CS}\perp\overrightarrow{BC}\ \Rightarrow\ \overrightarrow{CS}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

$(k-2,2,2-k)\cdot(2,k-2,-3)=0$

$2k-4+2k-4-6+3k=0\ \Rightarrow\ 7k=14\ \Rightarrow\ k=2$

כלומר: $k=2$.

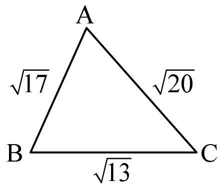
(ג) עבור $k=2$ נקבל:

$A(2,1,2)\ ,\ B(-2,1,1)\ ,\ C(0,1,-2)\ ,\ S(0,3,-2)$

$AB=\sqrt{4^2+0^2+1^2}=\sqrt{17}\qquad BC=\sqrt{2^2+0^2+3^2}=\sqrt{13}$

$AC=\sqrt{2^2+0^2+4^2}=\sqrt{20}\qquad SC=\sqrt{0^2+2^2+0^2}=2$

לפי משפט הקוסינוסים ב- ΔABC :



$13=17+20-2\sqrt{17}\sqrt{20}\cdot\cos\measuredangle A$

$\cos\measuredangle A=\frac{24}{2\sqrt{340}}=\frac{6}{\sqrt{85}}$

$\sin\measuredangle A=\sqrt{1-\left(\frac{6}{\sqrt{85}}\right)^2}=\frac{7}{\sqrt{85}}$

$S_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC}{2}\cdot\sin\measuredangle A=\frac{\sqrt{17}\cdot\sqrt{20}}{2}\cdot\frac{7}{\sqrt{85}}=$ 7 יחידות שטח

$V_{SABC}=\frac{1}{3}\cdot S_{\Delta ABC}\cdot SC=\frac{1}{3}\cdot 7\cdot 2=$ $\frac{14}{3}$ יחידות נפח

(4) (א) יחידת זמן = חודש.

חומר א׳: $200 = 500 \cdot q^8 \quad \Rightarrow \quad q = \sqrt[8]{0.4} \approx 0.8917795$

הזמן שבסופו נשארת רבע מהכמות ההתחלתית של חומר א׳:

$$\tfrac{1}{4} M_0 = M_0 \cdot 0.8917795^t$$

$$t = \frac{\ln\frac{1}{4}}{\ln 0.8917795} \approx 12.1 \text{ חודשים}$$

זמן זה שווה לזמן מחצית החיים של חומר ב׳. לכן בחומר ב׳ מתקיים:

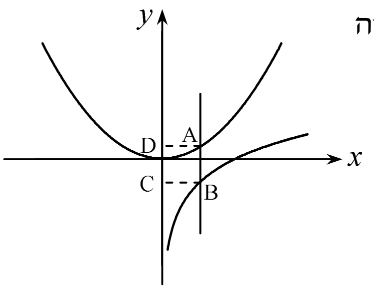
$$\tfrac{1}{2} M_0 = M_0 \cdot q^{12.1} \quad \Rightarrow \quad q = \sqrt[12.1]{\tfrac{1}{2}}$$

$$q = 0.9443 \quad \Rightarrow \quad p = 5.57\%$$

(ב) מכיוון שנתון: $a > 0$, הרי שתחום ההגדרה של $g(x)$ הוא $x > 0$.

נסמן: $x_A = x_B = t$, ואז:

$A(t, t^2)$, $B(t, \ln(at))$.



$$f(t) = P_{ABCD} = 2 \cdot AB + 2 \cdot AD =$$

$$= 2[t^2 - \ln(at)] + 2t = 2t^2 + 2t - 2\ln(at)$$

$$f'(t) = 4t + 2 - \frac{2a}{at} = 4t + 2 - \frac{2}{t}$$

$$f'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad 4t + 2 - \frac{2}{t} = 0 \quad / \cdot \frac{t}{2}$$

$$2t^2 + t - 1 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2 \cdot 1}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} \quad \Rightarrow \quad t_1 = -1 \ , \ t_2 = \frac{1}{2}$$

הפתרון $t_1 = -1$ אינו בתחום ההגדרה, לכן נקבל: $t = \frac{1}{2}$.

$$f''(t) = 4 + \frac{2}{t^2} \quad \Rightarrow \quad f''(\tfrac{1}{2}) > 0 \ \min$$

משוואת ישר ℓ : $x = \frac{1}{2}$.

(5) $f(x)=(x-\mathrm{a})e^{\frac{1}{2}x^2-x}$

בנקודה $x=1$ יש נקודת קיצון לפונקציה $f'(x)$, כלומר: $f''(1)=0$.

(א) (i) לפני הנקודה $x=1$ גרף הפונקציה $f'(x)$ יורד ($f''(x)<0$),

ואחרי הנקודה $x=1$ גרף הפונקציה $f'(x)$ עולה ($f''(x)>0$),

כלומר בנקודה $x=1$ לגרף הפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול.

(ii) הפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מעלה $\bigcup$ עבור $x>1$,

וקעורה כלפי מטה $\bigcap$ עבור $x<1$.

(iii) $\mathrm{m}_{\text{משיק}}=f'(x) \;\Rightarrow\; (\mathrm{m}_{\text{משיק}})'=f''(x)$

פונקציית שיפוע המשיק יורדת בתחום $0\le x\le 1$,

לכן שיפוע המשיק מקסימלי בנקודה $x=0$

ומינימלי בנקודה $x=1$.

(iv) $f'(x)>0$ לכל x , לכן הפונקציה $f(x)$ עולה לכל x .

(v) $\int_0^1 f'(x)dx=1 \;\Rightarrow\; f(x)\Big|_0^1=1 \;\Rightarrow\; f(1)-f(0)=1$

$$(1-\mathrm{a})e^{-\frac{1}{2}}-(0-\mathrm{a})e^0=1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{\sqrt{e}}-\frac{\mathrm{a}}{\sqrt{e}}+\mathrm{a}=1$$

$$1-\mathrm{a}+\sqrt{e}(\mathrm{a}-1)=0 \;\Rightarrow\; (\mathrm{a}-1)(\sqrt{e}-1)=0$$

$\sqrt{e}-1\ne 0$, לכן: $\mathrm{a}-1=0 \;\Rightarrow\; \mathrm{a}=1$

(ב) $x=2 \;\Rightarrow\; y=f(2)=(2-1)e^{\frac{2^2}{2}-2}=e^0=1$

$$f'(x)=1\cdot e^{\frac{x^2}{2}-x}+(x-1)e^{\frac{x^2}{2}-x}\cdot(x-1)=e^{\frac{x^2}{2}-x}(x^2-2x+2)$$

$$\mathrm{m}=f'(2)=e^0(4-4+2)=2$$

משוואת המשיק: $y-1=2(x-2) \;\Rightarrow\; y=2x-3$

המשך בעמוד הבא >>>

(ג)

$$f(1)=(1-1)e^{\frac{1}{2}-1}=0$$
$$y(1)=2\cdot1-3=-1$$

כלומר: $f(1)>y(1)$.

נניח כי בתחום $[1,2]$ הגרפים של הפונקציה $f(x)$ והמשיק y **לא נחתכים**.

$$S=\int_1^2\left[(x-1)e^{\frac{x^2}{2}-x}-2x+3\right]dx=$$
$$=\left(e^{\frac{x^2}{2}-x}-x^2+3x\right)\Big|_1^2=$$
$$=e^0-4+6-(e^{-\frac{1}{2}}-1+3)=3-\frac{1}{\sqrt{e}}-2=$$

$=1-\frac{1}{\sqrt{e}}\approx 0.393$ יחידת שטח