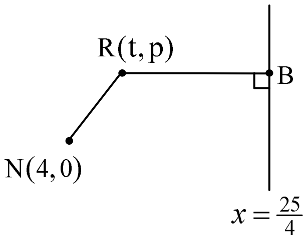
פתרון מבחן מס' 19 (ספר לימוד – שאלון 035807)

(1) (א) נסמן את שיעורי הנקודה האופיינית השייכת למקום הגיאומטרי ב- $R(t,p)$,



לכן לפי הנתונים: $RN=\frac{4}{5}RB$.

$$RN=\sqrt{(t-4)^2+(p-0)^2}$$

מרחק הנקודה R מהנקודה N קטן ממרחק הנקודה R עד הישר,

לכן הנקודה R נמצאת באותו הצד של הישר $x=\frac{25}{4}$ כמו הנקודה N .

כמו כן, $x_N<\frac{25}{4}$, לכן: $RB=\frac{25}{4}-t$.

$$RN=\frac{4}{5}RB \quad\Rightarrow\quad \sqrt{(t-4)^2+(p-0)^2}=\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{25}{4}-t\right)$$

$$t^2-8t+16+p^2=\frac{16}{25}\cdot\left(\frac{625}{16}-\frac{25}{2}t+t^2\right)$$

$$t^2-8t+16+p^2=25-8t+\frac{16}{25}t^2$$

$$\frac{9}{25}t^2+p^2=9 \quad\Rightarrow\quad 9t^2+25p^2=225 \quad\Rightarrow\quad 9x^2+25y^2=225$$

(ב) $9x^2+25y^2=225$ היא משוואה של אליפסה.

נרשום את משוואת האליפסה בצורה הסטנדרטית: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

שיעורי נקודות החיתוך של האליפסה עם הצירים: $(\pm5,0)$, $(0,\pm3)$.

(2) (א)

$$\overrightarrow{AB}=(0-1,k-0,0-(-1))=(-1,k,1)$$

$$\overrightarrow{AC}=(0-1,7-0,-3-(-1))=(-1,7,-2)$$

$$\cos\measuredangle BAC=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{(-1,k,1)\cdot(-1,7,-2)}{\sqrt{1^2+k^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+7^2+2^2}}$$

$$\cos30^\circ=\frac{1+7k-2}{\sqrt{k^2+2}\cdot\sqrt{54}} \quad\Rightarrow\quad \frac{\sqrt3}{2}=\frac{7k-1}{\sqrt{54(k^2+2)}}$$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

בתנאי ש- $k \geq \frac{1}{7}$ נקבל: $162(k^2+2) = 4(7k-1)^2 \quad / :2$

$$81k^2 + 162 = 98k^2 - 28k + 2 \quad \Rightarrow \quad 17k^2 - 28k - 160 = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{28 \pm 108}{34} \quad \Rightarrow \quad k_1 = 4 \ , \ k_2 = -\frac{80}{34}$$

הפתרון $k_2 = -\frac{80}{34}$ נפסל כי $k > 0$. לכן: $k = 4$.

ב) נסמן: $\underline{a} = (5,1,1)$.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \underline{a} = (-1,4,1) \cdot (5,1,1) = -5+4+1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} \perp \underline{a}$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \underline{a} = (-1,7,-2) \cdot (5,1,1) = -5+7-2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AC} \perp \underline{a}$$

אם הווקטור $\underline{a}$ מאונך לשני וקטורים לא מקבילים הנמצאים במישור אחד,

אז הוא מאונך למישור זה: $\underline{a} \perp (ABC)$.

($\overrightarrow{AB}$ ו- $\overrightarrow{AC}$ אינם מתלכדים, כי $(-1,4,1) \neq \alpha \cdot (-1,7,-2)$).

ג) $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{CD}$ (נתון)

$\underline{a} \perp \overrightarrow{CD}$ (ישר המאונך למישור, מאונך לכל ישר במישור זה)

לכן, נסמן: $\overrightarrow{CD} = (0,7,-3) + \beta \cdot (a,b,c)$

$$\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AC} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (a,b,c) \cdot (-1,7,-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad -a + 7b - 2c = 0 \quad (*)$$

$$\overrightarrow{CD} \perp \underline{a} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (a,b,c) \cdot (5,1,1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 5a + b + c = 0 \quad / \cdot 2$$

$$\Rightarrow \quad 10a + 2b + 2c = 0 \quad (**)$$

נחבר אגפים מתאימים בשתי המשוואות $(*)$ ו- $(**)$ ונקבל:

$$9a + 9b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -a$$

$$-a - 7a - 2c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -4a$$

כלומר: $(a,b,c) = (a,-a,-4a)$

מכאן: $CD \ : \ \underline{x} = (0,7,-3) + t \cdot (1,-1,-4)$

(3) (א) נסמן: $z = x + iy$.

$$(x+iy)^2 + \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 - 2ti = 18s^2$$

$$x^2 - y^2 + 2xyi + x^2 + y^2 - 2ti = 18s^2$$

$$\mathrm{Re}(L) = \mathrm{Re}(R) \quad\Rightarrow\quad x^2 - y^2 + x^2 + y^2 = 18s^2 \quad\Rightarrow\quad x^2 = 9s^2$$

$$\mathrm{Im}(L) = \mathrm{Im}(R) \quad\Rightarrow\quad 2xy - 2t = 0 \quad\Rightarrow\quad xy = t$$

קיבלנו את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x^2 = 9s^2 \\ xy = t \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{matrix} x_1 = -3s \quad\Rightarrow\quad y_1 = -\frac{t}{3s} \\ x_2 = 3s \quad\Rightarrow\quad y_2 = \frac{t}{3s} \end{matrix}$$

תשובה: $z_1 = 3s + \frac{t}{3s}i$, $z_2 = -3s - \frac{t}{3s}i$.

(ב)

$$z_1 \cdot z_2 = -18i \quad\Rightarrow\quad \left(3s + \frac{t}{3s}i\right)\cdot\left(-3s - \frac{t}{3s}i\right) = -18i$$

$$-\left(9s^2 - \frac{t^2}{9s^2} + 2ti\right) = -18i \quad\Rightarrow\quad 9s^2 - \frac{t^2}{9s^2} + 2ti = 18i$$

נקבל את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} 9s^2 - \frac{t^2}{9s^2} = 0 \\ 2t = 18 \qquad\Rightarrow\quad t = 9 \end{cases}$$

$$9s^2 - \frac{81}{9s^2} = 0 \quad\Rightarrow\quad s^4 = 1 \quad\Rightarrow\quad s = \pm 1$$

(4) $y = \frac{x}{\ln(-cx)}$ ($c \neq 0$).

(א) עבור $c > 0$:

תחום הגדרה :
$$\begin{cases} -cx > 0 \\ \ln(-cx) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x \neq -\frac{1}{c} \end{cases}$$

שיעורי נקודת הקיצון :
$$y' = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1 \cdot \ln(-cx) - x \cdot \frac{-c}{-cx}}{\ln^2(-cx)} = 0 \;\Rightarrow\; \ln(-cx) - 1 = 0$$
$$\ln(-cx) = 1 \;\Rightarrow\; -cx = e \;\Rightarrow\; x = -\frac{e}{c}$$
$$y(-\tfrac{e}{c}) = \frac{-\frac{e}{c}}{\ln e} = -\frac{e}{c}$$

נבדוק האם הנקודה $\left(-\frac{e}{c}, -\frac{e}{c}\right)$ אכן נקודת קיצון,

ואם כן נקבע את סוגה.

x	$x < -\frac{e}{c}$	$x = -\frac{e}{c}$	$-\frac{e}{c} < x < -\frac{1}{c}$
y'	+	0	−
y	↗	max	↘

$$y'\left(-\frac{2e}{c}\right) = \frac{\ln 2e - 1}{(+)} > 0 \qquad y'\left(-\frac{e}{2c}\right) = \frac{\ln\frac{e}{2} - 1}{(+)} < 0$$

כלומר : $\max\left(-\frac{e}{c}, -\frac{e}{c}\right)$.

(ב) עבור $c < 0$:

תחום הגדרה :
$$\begin{cases} -cx > 0 \\ \ln(-cx) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq -\frac{1}{c} \end{cases}$$

שיעורי נקודת הקיצון :
$$y' = 0 \;\Rightarrow\; \ln(-cx) = 1 \;\Rightarrow\; x = -\frac{e}{c} \;\Rightarrow\; y = -\frac{e}{c}$$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

x	$-\frac{1}{c}<x<-\frac{e}{c}$	$x=-\frac{e}{c}$	$x>-\frac{e}{c}$
y'	$-$	0	$+$
y	↘	min	↗

$$y'\left(-\frac{e}{2c}\right)=\frac{\ln\frac{e}{2}-1}{(+)}<0 \qquad y'\left(-\frac{2e}{c}\right)=\frac{\ln 2e-1}{(+)}>0$$

כלומר: $\min\left(-\frac{e}{c},-\frac{e}{c}\right)$.

(ג)
$$y''=0 \;\Rightarrow\; \left[\frac{\ln(-cx)-1}{\ln^2(-cx)}\right]'=0 \;\Rightarrow\; \left[\frac{1}{\ln(-cx)}-\frac{1}{\ln^2(-cx)}\right]'=0$$

$$-\frac{\frac{-c}{-cx}}{\ln^2(-cx)}+\frac{2\cdot\frac{-c}{-cx}}{\ln^3(-cx)}=0 \;\Rightarrow\; -\frac{1}{x\ln^2(-cx)}+\frac{2}{x\ln^3(-cx)}=0$$

$$2-\ln(-cx)=0 \;\Rightarrow\; \ln(-cx)=2$$

$$-cx=e^2 \;\Rightarrow\; x=-\frac{e^2}{c} \quad (c\neq 0)$$

$$y\left(-\frac{e^2}{c}\right)=\frac{-\frac{e^2}{c}}{\ln(e^2)}=-\frac{e^2}{2c} \;\Rightarrow\; \left(-\frac{e^2}{c},-\frac{e^2}{2c}\right)$$

הנגזרת השנייה משנה את סימנה סביב $x=-\frac{e^2}{c}$,

לכן נקודת פיתול: $\left(-\frac{e^2}{c},-\frac{e^2}{2c}\right)$.

(5) (א)
$$\left(\frac{-n^2x-1}{e^{n^2x}}\right)'=\frac{-n^2\cdot e^{n^2x}+(n^2x+1)\cdot e^{n^2x}\cdot n^2}{\left(e^{n^2x}\right)^2}=$$

$$=\frac{-n^2\,(1-n^2x-1)}{e^{n^2x}}=\frac{n^4x}{e^{n^2x}}$$

המשך בעמוד הבא ⮜⮜⮜

ב)
$$g'(x)=\mathrm{n}^4\cdot\left(\frac{x}{e^{\mathrm{n}^2x}}\right)'=\mathrm{n}^4\cdot\frac{e^{\mathrm{n}^2x}-x\cdot e^{\mathrm{n}^2x}\cdot\mathrm{n}^2}{\left(e^{\mathrm{n}^2x}\right)^2}=\frac{\mathrm{n}^4}{e^{\mathrm{n}^2x}}(1-x\mathrm{n}^2)$$

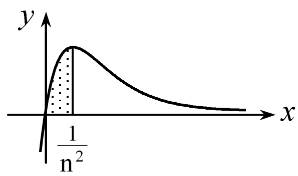
$$g'(x)=0 \;\Rightarrow\; 1-x\mathrm{n}^2=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{1}{\mathrm{n}^2}$$

הנגזרת משנה את סימנה סביב $x=\frac{1}{\mathrm{n}^2}$, לכן $x_{\text{קיצון}}=\frac{1}{\mathrm{n}^2}$.

ג)
$$S_{\text{מנוקד}}=\int_0^{\frac{1}{\mathrm{n}^2}} g(x)\,dx=[f(x)]\Big|_0^{\frac{1}{\mathrm{n}^2}}=$$

$$=f\left(\frac{1}{\mathrm{n}^2}\right)-f(0)=\frac{-\mathrm{n}^2\cdot\frac{1}{\mathrm{n}^2}-1}{e^{\mathrm{n}^2\cdot\frac{1}{\mathrm{n}^2}}}-\frac{0-1}{e^0}=$$

$$=-\frac{2}{e}+1=\left(1-\frac{2}{e}\right)\text{ יחידות שטח}$$



גבי יקואל

משבצת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929