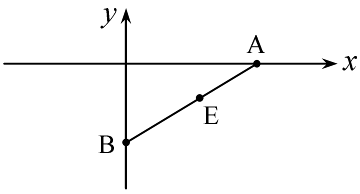
פתרון מבחן מס' 17 (ספר לימוד – שאלון 035807)



(1) נסמן: $A(x_A,0)$, $B(0,y_B)$.

נתון: $(n>m>0)$ $\frac{AE}{EB}=\frac{m}{n}$, $AB=3$.

(א) $E(t,p)$. מכאן:

$$\begin{cases}\frac{x_A-t}{t-0}=\frac{m}{n}\\ \frac{0-p}{p-y_B}=\frac{m}{n}\\ \sqrt{(x_A-0)^2+(0-y_B)^2}=3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_A=\frac{tm}{n}+t\\ y_B=\frac{pn}{m}+p\\ {x_A}^2+{y_B}^2=9\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_A=t\left(1+\frac{m}{n}\right)\\ y_B=p\left(1+\frac{n}{m}\right)\\ {x_A}^2+{y_B}^2=9 \quad\Rightarrow\quad t^2\left(1+\frac{m}{n}\right)^2+p^2\left(1+\frac{n}{m}\right)^2=9\end{cases}$$

$$t^2\cdot\frac{(n+m)^2}{n^2}+p^2\cdot\frac{(m+n)^2}{m^2}=9$$

נחזור למשוואה של מקום גאומטרי, כלומר: $t=x$, $p=y$

נקבל: $$\frac{x^2(n+m)^2}{n^2}+\frac{y^2(m+n)^2}{m^2}=9$$

כלומר, קיבלנו משוואת אליפסה: $$\frac{x^2}{\frac{9n^2}{(n+m)^2}}+\frac{y^2}{\frac{9m^2}{(n+m)^2}}=1$$

(ב) $$2a=2\sqrt{\frac{9n^2}{(n+m)^2}}=2\cdot\frac{3n}{n+m}=\frac{6n}{n+m}$$

(2) (א)

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} = \underline{v} + \underline{u} + \tfrac{1}{2}\cdot\overrightarrow{CB} =$$

$$= \underline{v} + \underline{u} + \tfrac{1}{2}\cdot(-\underline{u} - \underline{v} + 3\underline{u}) =$$

$$= \underline{v} + \underline{u} + \tfrac{1}{2}\cdot(2\underline{u} - \underline{v}) = 2\underline{u} + \tfrac{1}{2}\underline{v}$$

(ב)

$$\overrightarrow{PD} = t\cdot\overrightarrow{BD} \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{PD} = t(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = t\cdot(-3\underline{u} + \underline{v})$$

$$\overrightarrow{AP} = s\cdot\overrightarrow{AF} = s\cdot(2\underline{u} + \tfrac{1}{2}\underline{v})$$

ב- ΔADP :

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{PA} = 0$$

$$\underline{v} - t\cdot(-3\underline{u} + \underline{v}) - s\cdot(2\underline{u} + \tfrac{1}{2}\underline{v}) = 0$$

$$\underline{v} + 3t\underline{u} + -t\cdot\underline{v} - 2s\cdot\underline{u} - \tfrac{1}{2}s\cdot\underline{v} = 0$$

$$(3t - 2s)\cdot\underline{u} + (1 - t - \tfrac{s}{2})\cdot\underline{v} = 0 \quad (*)$$

$\underline{u}$ אינו מקביל ל- $\underline{v}$, לכן התנאי $(*)$ מתקיים רק כאשר :

$$\begin{cases} 3t - 2s = 0 \\ 1 - t - \frac{s}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = \frac{3}{2}t \\ 1 - t - \frac{3}{4}t = 0 \quad\Rightarrow\quad t = \frac{4}{7} \end{cases}$$

$$t = \tfrac{4}{7} \quad\Rightarrow\quad s = \tfrac{3}{2}t = \tfrac{6}{7}$$

(ג) לפי סעיף (ב) :

$$\frac{BP}{PD} = \frac{3}{4}\ ,\ \frac{PF}{AP} = \frac{1}{6}$$

$$S_{\Delta PFB} = \frac{PF\cdot PB}{2}\sin\measuredangle FPB$$

$$S_{\Delta APD} = \frac{AP\cdot PD}{2}\sin\measuredangle DPA$$

$\measuredangle FPB = \measuredangle DPA$ (זוויות קדקודיות שוות זו לזו), לכן :

$$\frac{S_{\Delta PFB}}{S_{\Delta APD}} = \frac{PF\cdot PB}{AP\cdot PD} = \frac{PF}{AP}\cdot\frac{PB}{PD} = \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{8}$$

(3) (א) נתון: $SA = SB = SC$,

$AB = BC = AC = 1.2 \cdot SA$.

נסמן את אורך המקצוע הצדדי ב- a ,

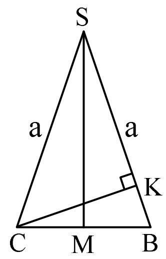
ואז אורך צלע הבסיס הוא $1.2a$.

מנקודה C נעביר אנך ל- BS (ב- ΔCBS): $CK \perp SB$.

נחבר את הנקודות A ו- K . נקבל: $\Delta AKB \cong \Delta CKB$

(לפי משפט חפיפה: צלע, צלע והזווית מול הצלע הגדולה),

לכן: $\measuredangle AKB = 90° \Rightarrow AK \perp SB$



והזווית $\measuredangle AKC$ היא הזווית המבוקשת.

נתבונן ב- ΔBCS .

נוריד אנך SM ל- BC ($\measuredangle SMB = 90°$).

$$MB = \frac{1}{2} \cdot BC = 0.6a$$

(גובה לבסיס במשולש שווה-שוקיים הוא גם תיכון לבסיס).

לפי משפט פיתגורס ב- ΔSMB :

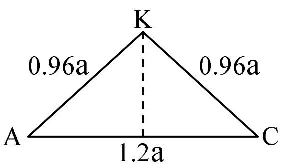
$$SM^2 = a^2 - (0.6a)^2 \Rightarrow SM = 0.8a$$

$$S_{\Delta BCS} = \frac{BC \cdot SM}{2} = \frac{1.2a \cdot 0.8a}{2} = 0.48a^2$$

$$S_{\Delta BCS} = \frac{SB \cdot CK}{2} \Rightarrow 0.48a^2 = \frac{a \cdot CK}{2}$$

$$CK = 0.96a = AK$$

נתבונן ב- ΔACK :



$$\sin\left(\frac{1}{2}\measuredangle K\right) = \frac{0.6a}{0.96a} \Rightarrow \frac{1}{2}\measuredangle K = 38.68°$$

$$\measuredangle AKC = 2 \cdot 38.68° = 77.36°$$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(ב) נסמן: $z=\mathrm{r}\operatorname{cis}\theta$ ואז:

$$w=\frac{z^2}{\bar{z}^2}=\frac{(\mathrm{r}\operatorname{cis}\theta)^2}{[\mathrm{r}\operatorname{cis}(-\theta)]^2}=\frac{\mathrm{r}^2\operatorname{cis}2\theta}{\mathrm{r}^2\operatorname{cis}(-2\theta)}=1\operatorname{cis}4\theta$$

כלומר, $|w|=1$ והזווית של w בהצגה הקוטבית שווה ל- 4θ

כלומר ל- 4 פעמים הארגומנט של z .

(4) (א) לפי השאלה נוכל להרכיב את המשוואה:

$$\left[12{,}000\cdot\left(1+\tfrac{\mathrm{p}}{100}\right)^8-7{,}000\right]\cdot\left(1+\tfrac{\mathrm{p}}{100}\right)^8=34{,}000$$

נסמן: $\left(1+\tfrac{\mathrm{p}}{100}\right)^8=x$, נחלק את שני האגפים ב- $1{,}000$ ונקבל:

$$(12x-7)\cdot x=34 \;\Rightarrow\; 12x^2-4x-34=0$$

$$x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49+4\cdot12\cdot34}}{24}=\frac{7\pm41}{24}$$

$$x_1=\frac{7+41}{24}=2\;,\; x_2=\frac{7-41}{24}<0$$ מבוטל

$$\left(1+\tfrac{\mathrm{p}}{100}\right)^8=2 \;\Rightarrow\; 1+\tfrac{\mathrm{p}}{100}=\sqrt[8]{2}$$

$$\mathrm{p}=(\sqrt[8]{2}-1)\cdot100 \;\Rightarrow\; \mathrm{p}=9.05\%$$

(ב) תחום ההגדרה של $f(x)=x\sqrt[3]{x-\mathrm{a}}$ הוא: כל x .

$$f'(x)=\sqrt[3]{x-\mathrm{a}}+x\cdot\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(x-\mathrm{a})^2}}=\frac{3(x-\mathrm{a})+x}{3\cdot\sqrt[3]{(x-\mathrm{a})^2}}=\frac{4x-3\mathrm{a}}{3\cdot\sqrt[3]{(x-\mathrm{a})^2}}$$

$$f''(x)=\frac{1}{3}\cdot\frac{4\cdot\sqrt[3]{(x-\mathrm{a})^2}-(4x-3\mathrm{a})\cdot\frac{2}{3\sqrt[3]{x-\mathrm{a}}}}{9\cdot\sqrt[3]{(x-\mathrm{a})^4}}$$

$$f''(x)=0 \;\Rightarrow\; 12(x-\mathrm{a})-2(4x-3\mathrm{a})=0$$

$$6(x-\mathrm{a})-(4x-3\mathrm{a})=0 \;\Rightarrow\; 2x-3\mathrm{a}=0 \;\Rightarrow\; x=1.5\mathrm{a}$$

$$f''(x)=\frac{(+)\,(2x-3\mathrm{a})}{(+)}$$

הנגזרת השנייה מחליפה סימנה בנקודה $x=1.5\mathrm{a}$,

לכן בנקודה זו לפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול.

(5) (א) נמצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x :

$$f(x)=0 \quad \Rightarrow \quad (\ln x)^{m-1}\cdot(\ln x-1)=0$$

$$\ln x=0 \quad \Rightarrow \quad x=1 \quad \Rightarrow \quad A(1,0)$$

$$\ln x-1=0 \quad \Rightarrow \quad \ln x=1 \quad \Rightarrow \quad x=e \quad \Rightarrow \quad B(e,0)$$

למציאת שיפועי המשיקים, נגזור את הפונקציה ונקבל:

$$f'(x)=m\cdot(\ln x)^{m-1}\cdot\tfrac{1}{x}-(m-1)(\ln x)^{m-2}\cdot\tfrac{1}{x}=$$

$$=\tfrac{1}{x}\cdot(\ln x)^{m-2}(m\ln x-m+1)$$

$$m_A=f'(x_A)=f'(1)=\tfrac{1}{1}\cdot(\ln 1)^{m-2}\cdot(m\ln 1-m+1)=0$$

משוואת המשיק בנקודה A : $y=0$.

$$m_B=f'(x_B)=f'(e)=\tfrac{1}{e}\cdot(\ln e)^{m-2}\cdot(m\ln e-m+1)=$$

$$=\tfrac{1}{e}(m-m+1)=\tfrac{1}{e}$$

משוואת המשיק בנקודה B : $y=\tfrac{1}{e}(x-e) \quad \Rightarrow \quad y=\tfrac{1}{e}x-1$

(ב)

$$f_3=f(m=3)=\ln^3 x-\ln^2 x=\ln^2 x(\ln x-1)$$

$$f_5=f(m=5)=\ln^5 x-\ln^4 x=\ln^4 x(\ln x-1)$$

$$f_3=f_5 \quad \Rightarrow \quad \ln^4 x(\ln x-1)=\ln^2 x(\ln x-1)$$

$$\ln^4 x(\ln x-1)-\ln^2 x(\ln x-1)=0$$

$$\ln^2 x(\ln x-1)(\ln^2 x-1)=0$$

$$\ln x=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=1 \quad \Rightarrow \quad y_1=0 \quad \Rightarrow \quad (1,0)$$

$$\ln x=1 \quad \Rightarrow \quad x_2=e \quad \Rightarrow \quad y_2=0 \quad \Rightarrow \quad (e,0)$$

$$\ln x=-1 \quad \Rightarrow \quad x_3=\tfrac{1}{e} \quad \Rightarrow \quad y_3=\ln^2\tfrac{1}{e}\cdot\left(\ln\tfrac{1}{e}-1\right)=$$

$$=(-1)^2\cdot(-1-1)=-2$$

כלומר: $\left(\tfrac{1}{e},-2\right)$.

גבי יקואל

משבצת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

◈ לכל הכיתות ◈ לכל השאלונים ◈ לכל הרמות