

פתרון מבחן מס' 16 (ספר לימוד – שאלון 035807)

$$ax^2 + by^2 = c \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{c}{a}} + \frac{y^2}{\frac{c}{b}} = 1$$

רדיוס המעגל הוא: $R = \sqrt{180}$, מכאן:

$$AB = 2R = 2\sqrt{180} = 12\sqrt{5}$$

לאליפסה ולמעגל יש נקודות משותפות

עבור $y = 0$, לכן:

$$\begin{cases} ax^2 = c \\ x^2 = 180 \end{cases} \Rightarrow \frac{c}{a} = 180 \Rightarrow \frac{x^2}{180} + \frac{y^2}{\left(\frac{c}{b}\right)^2} = 1$$

נמצא את שיעור ה- x של הנקודה A:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 180 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow x^2 + 4x^2 = 180 \Rightarrow 5x^2 = 180$$

$$x^2 = 36 \Rightarrow x = \pm 6, x > 0 \Rightarrow x_A = 6$$

נתון כי $AB = 3 \cdot CD$, לכן: $OA = 3 \cdot OC$, כלומר:

$$x_C = \frac{1}{3} \cdot x_A = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2$$

$$y_C = 2 \cdot 2 = 4 \Rightarrow C(2, 4)$$

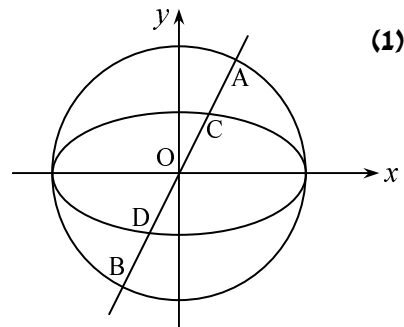
הנקודה C נמצאת על האליפסה, לכן שיעוריה מקיימים את משוואת האליפסה:

$$\frac{2^2}{180} + \frac{4^2}{\left(\frac{c}{b}\right)^2} = 1 \Rightarrow \frac{16}{\left(\frac{c}{b}\right)^2} = 1 - \frac{1}{45} = \frac{44}{45}$$

$$\left(\frac{c}{b}\right)^2 = \frac{16 \cdot 45}{44} = \frac{180}{11}$$

$$\frac{x^2}{180} + \frac{y^2}{\frac{180}{11}} = 1 \Rightarrow x^2 + 11y^2 = 180$$

משוואת האליפסה היא:



(1)

$$ABCD : x + 2y + 2z - 1 = 0 \quad (2)$$

$$A'B'C'D' : x + 2y + 2z - 13 = 0$$

(א) נסמן ב- a את אורך מקצוע הקובייה.

אורך זה שווה למרחק בין המישורים $ABCD$ ו- $A'B'C'D'$, כלומר:

$$a = \frac{|-1+13|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{12}{3} = 4$$

$$V = a^3 = 4^3 = 64 \text{ יחידות נפח}$$

$$ABB'A' : 2x + y - 2z - 16 = 0 \quad (ב)$$

הפאה $DCC'D'$ מקבילה לפאה $AAB'C'$

ונמצאת במרחק 4 יחידות ממנה.

$$2x + y - 2z + D = 0 \quad \text{משוואת המישור } DCC'D' :$$

$$\frac{|D+16|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = 4 \Rightarrow |D+16| = 12 \Rightarrow D_1 = -4, D_2 = -28$$

$$DD'C'C : 2x + y - 2z - 4 = 0 \quad \text{עבור } D_1 = -4$$

$$A'B'C'D' : x + 2y + 2z - 13 = 0$$

נחבר אגפים מתאימים בשתי המשוואות ונקבל: $C'D' : 3x + 3y - 17 = 0$

נקבע: $y = t$ ואז: $x = \frac{17}{3} - t$, ומכאן:

$$\frac{17}{3} - t + 2t + 2z - 13 = 0 \Rightarrow 2z = \frac{22}{3} - t \Rightarrow z = \frac{11}{3} - \frac{1}{2}t$$

הצגה פרמטרית של $C'D'$ היא:

$$\begin{cases} x = \frac{17}{3} - t \\ y = t \\ z = \frac{11}{3} - \frac{1}{2}t \end{cases} \Rightarrow \underline{x} = \left(\frac{17}{3}, 0, \frac{11}{3}\right) + t\left(-1, 1, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\underline{x} = \left(\frac{17}{3}, 0, \frac{11}{3}\right) + r(2, -2, 1) \quad \text{או:}$$

◀◀◀ המשך בעמוד הבא

$$DD'C'C : 2x + y - 2z - 28 = 0 \quad \text{עבור } D_2 = -28$$

$$A'B'C'D' : x + 2y + 2z - 13 = 0$$

נחבר אגפים מתאימים בשתי המשוואות ונקבל: $C'D' : 3x + 3y - 41 = 0$
 נקבע: $y = m$ ואז: $x = \frac{41}{3} - m$, ומכאן:

$$\frac{41}{3} - m + 2m + 2z - 13 = 0 \Rightarrow z = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2}m$$

הצגה פרמטרית של $C'D'$ היא:

$$\begin{cases} x = \frac{41}{3} - m \\ y = m \\ z = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2}m \end{cases} \Rightarrow \underline{x} = \left(\frac{41}{3}, 0, -\frac{1}{3}\right) + m\left(-1, 1, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\underline{x} = \left(\frac{41}{3}, 0, -\frac{1}{3}\right) + p(2, -2, 1) \quad \text{או:}$$

(3) (א) נסמן: $z = x + iy$, ואז:

$$\overline{i(x + iy)} + 3(x + iy) + 4 + 11i = (\sqrt{x^2 + y^2})^2$$

$$\overline{-y + ix} + 3x + 3iy + 4 + 11i = x^2 + y^2$$

$$-y - ix + 3x + 3iy + 4 + 11i = x^2 + y^2$$

אם שני מספרים מרוכבים שווים, אז החלקים הממשיים שלהם

וגם החלקים המדומים שלהם שווים בהתאמה. מכאן:

$$\begin{cases} -y + 3x + 4 = x^2 + y^2 \\ -x + 3y + 11 = 0 \Rightarrow x = 3y + 11 \end{cases}$$

$$-y + 3(3y + 11) + 4 = (3y + 11)^2 + y^2$$

$$8y + 37 = 10y^2 + 66y + 121 \Rightarrow 10y^2 + 58y + 84 = 0$$

$$5y^2 + 29y + 42 = 0 \Rightarrow y_{1,2} = \frac{-29 \pm 1}{10}$$

$$y_1 = -2.8 \Rightarrow x_1 = 3 \cdot (-2.8) + 11 = 2.6 \Rightarrow z_1 = 2.6 - 2.8i$$

$$y_2 = -3 \Rightarrow x_2 = 3 \cdot (-3) + 11 = 2 \Rightarrow z_2 = 2 - 3i$$

◀◀◀ המשך בעמוד הבא

$$a_1 = 2 - 3i, d = a - i, S_n = 90 - 63i \quad (\text{ב})$$

$$S_n = [2a_1 + d \cdot (n-1)] \cdot \frac{n}{2}$$

$$[2 \cdot (2 - 3i) + (a - i) \cdot (n-1)] \cdot \frac{n}{2} = 90 - 63i$$

$$[4 - 6i + a(n-1) - i(n-1)] \cdot n = 180 - 126i$$

$$\begin{cases} [4 + a(n-1)] \cdot n = 180 \\ [-6 - (n-1)] \cdot n = -126 \end{cases} \Rightarrow n^2 + 5n - 126 = 0$$

$$n_1 = 9 \quad \text{מהמשוואה השנייה נקבל:}$$

$$n_2 = -14 \Rightarrow \text{הפתרון נפסל כי מספר איברים הוא גודל חיובי}$$

$$(4 + 8a) \cdot 9 = 180 \quad \text{נציב } n = 9 \text{ במשוואה הראשונה:}$$

$$4 + 8a = 20 \Rightarrow a = 2$$

$$(4) \text{ (א) תחום ההגדרה: } \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1 \cdot \ln x - \frac{1}{x} \cdot x}{\ln^2 x} = 0 \Rightarrow \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} = 0 \quad \text{(ב)}$$

$$\ln x - 1 = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e \Rightarrow y = \frac{e}{1} = e \Rightarrow (e, e)$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\ln^2 x} \right)' = -\frac{1}{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x} + \frac{2}{\ln^3 x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln^2 x} \left(\frac{2}{\ln x} - 1 \right)$$

$$f''(e) = \frac{1}{e \cdot 1^2} \cdot \left(\frac{2}{1} - 1 \right) > 0 \Rightarrow \min(e, e)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{\ln x} = \frac{1}{0^-} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\ln x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad \text{(ג)}$$

מכאן, $x = 1$ היא משוואת אסימפטוטה אנכית.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln x} = \left(\frac{0}{-\infty} \right) = 0^-$$

לגרף הפונקציה יש אסימפטוטה אנכית אחת, שמשוואתה $x = 1$.

$$f''(x) = \frac{1}{x \ln^2 x} \cdot \frac{2 - \ln x}{\ln x} \quad \text{(ד)}$$

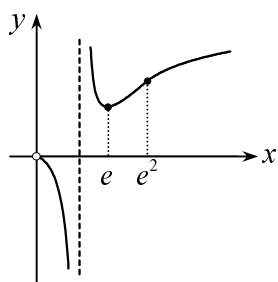
$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{x \ln^2 x} \cdot \frac{2 - \ln x}{\ln x} = 0 \Rightarrow 2 - \ln x = 0$$

$$\ln x = 2 \Rightarrow x = e^2 \Rightarrow y = \frac{e^2}{2} \Rightarrow \left(e^2, \frac{e^2}{2} \right)$$

x	$0 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x < e^2$	$x = e^2$	$x > e^2$
$f''(x)$	-	נקודת אי-הגדרה	+	0	-
$F(x)$	\cap		\cup		\cap

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = (+) \cdot \frac{2 + 0.693}{-0.693} < 0, \quad f''(2) = (+) \cdot \frac{2 - 0.693}{0.693} > 0$$

$$f''(8) = (+) \cdot \frac{2 - 2.08}{2.08} < 0$$



שיעורי נקודת הפיתול הם $\left(e^2, \frac{e^2}{2} \right)$.

$1 < x < e^2$: קעירות כלפי מעלה \cup

: קעירות כלפי מטה \cap

. $0 < x < 1$ או $x > e^2$

(ה) ראו סרטוט משמאל.

(5) (א) נמצא את שיעורי נקודות החיתוך בין הגרפים:

$$\begin{cases} y = a - \frac{3a^2}{16} e^x \\ y = e^{-x} \end{cases} \Rightarrow a - \frac{3a^2}{16} e^x = e^{-x}$$

נסמן: $e^x = m$ ואז:

$$a - \frac{3a^2}{16} e^x = e^{-x} \Rightarrow a - \frac{3a^2}{16} m = \frac{1}{m} \quad / \cdot 16m$$

$$3a^2 m^2 - 16am + 16 = 0 \Rightarrow m_{1,2} = \frac{16a \pm 8a}{6a^2}$$

$$m_1 = \frac{4}{3a} \Rightarrow e^x = \frac{4}{3a}, a > 0 \Rightarrow x_1 = \ln \frac{4}{3a}$$

$$m_2 = \frac{4}{a} \Rightarrow e^x = \frac{4}{a}, a > 0 \Rightarrow x_2 = \ln \frac{4}{a}$$

$$I = \int_{\ln \frac{4}{3a}}^{\ln \frac{4}{a}} \left(a - \frac{3a^2}{16} e^x - e^{-x} \right) dx = \left(ax - \frac{3a^2}{16} e^x + e^{-x} \right) \Big|_{\ln \frac{4}{3a}}^{\ln \frac{4}{a}} = \quad (ב)$$

$$= a \cdot \left(\ln \frac{4}{a} - \ln \frac{4}{3a} \right) - \frac{3a^2}{16} \cdot \left(\frac{4}{a} - \frac{4}{3a} \right) + \frac{a}{4} - \frac{3a}{4} =$$

$$= a \cdot \ln \frac{4}{3a} - \frac{3a^2}{16} \cdot \frac{8}{3a} - \frac{a}{2} = a \ln 3 - a = a \cdot (\ln 3 - 1)$$

$$\begin{cases} a > 0 \\ \ln 3 - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow I > 0 \Rightarrow S = I = \text{יחידות שטח } a \cdot (\ln 3 - 1)$$

גבי יקואל

מ ש ב צ ת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

לכל הכיתות ✦ לכל השאלונים ✦ לכל הרמות