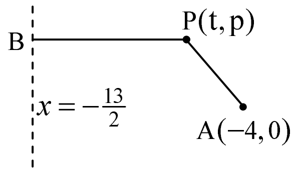
פתרון מבחן מס' 15 (ספר לימוד – שאלון 035807)



(1) (א) נסמן את שיעורי הנקודה האופיינית של המקום הגיאומטרי ב- $P(t,p)$.

לפי הנתון נקבל: $\frac{PA}{PB}=\frac{4}{\sqrt{26}}$, כלומר:

$$\frac{\sqrt{(t+4)^2+p^2}}{t+\frac{13}{2}}=\frac{4}{\sqrt{26}} \quad\Rightarrow\quad \sqrt{26}\cdot\sqrt{(t+4)^2+p^2}=4t+26$$

$$26(t^2+8t+16+p^2)=16t^2+208t+676$$

$$10t^2+26p^2=260 \quad\Rightarrow\quad \frac{x^2}{26}+\frac{y^2}{10}=1$$

(ב) מוקדי האליפסה הם: $F(\pm c,0)$. נמצא את c :

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{26-10}=4$$

כלומר: $F_2(-4,0)$, $F_1(4,0)$.

נסמן $A(t,p)$. הנקודה A נמצאת על האליפסה, לכן שיעוריה מקיימים את משוואת האליפסה:

$$\frac{t^2}{26}+\frac{p^2}{10}=1 \quad ①$$

נתון כי $\measuredangle F_1AF_2=90$, כלומר: $AF_1\perp AF_2$, לכן: $m_{AF_1}\cdot m_{AF_2}=-1$

$$\frac{p-0}{t-4}\cdot\frac{p-0}{t+4}=-1 \quad\Rightarrow\quad p^2=-(t^2-16) \quad\Rightarrow\quad p^2=16-t^2 \quad ②$$

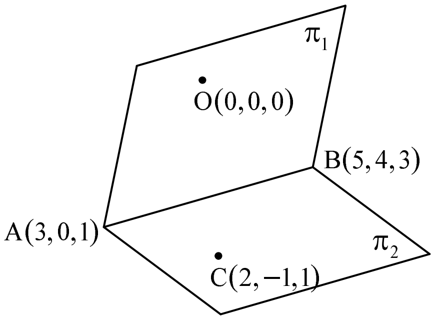
נציב את ② ב- ① ונקבל:

$$\frac{t^2}{26}+\frac{16-t^2}{10}=1 \quad /\cdot 260$$

$$10t^2+416-26t^2=260 \quad\Rightarrow\quad 16t^2=156 \quad\Rightarrow\quad t^2=\frac{156}{10}=\frac{39}{4}$$

$$t_1=\frac{\sqrt{39}}{2} \quad\Rightarrow\quad p=\pm\sqrt{16-\frac{39}{4}}=\pm\frac{5}{2} \quad\Rightarrow\quad A_{1,2}\left(\frac{\sqrt{39}}{2},\pm\frac{5}{2}\right)$$

$$t_2=-\frac{\sqrt{39}}{2} \quad\Rightarrow\quad p=\pm\frac{5}{2} \quad\Rightarrow\quad A_{3,4}\left(-\frac{\sqrt{39}}{2},\pm\frac{5}{2}\right)$$



(2) $\pi_1 : O(0,0,0)\ ,\ A(3,0,1)\ ,\ B(5,4,3)$

נמצא את משוואת המישור π_1 :

$$ax+by+cz+d=0$$
$$0+0+0+d=0 \Rightarrow d=0$$
$$3a+0+c=0 \Rightarrow c=-3a$$
$$5a+4b+3c=0 \Rightarrow b=a$$

כלומר משוואת המישור π_1 : $\pi_1 : x+y-3z=0$

משוואת המישור xy : $z=0$, לכן: $\ell_1 : x+y=0$

$$\begin{cases} x=t \\ y=-t \end{cases} \Rightarrow \ell_1 : \underline{x} = \cancel{(0,0,0)} + t(1,-1,0) = t(1,-1,0)$$

נמצא את משוואת המישור π_2 : $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$

$$\begin{cases} 3a_1+c_1+d_1=0 \Rightarrow d_1=-3a_1-c_1 \\ 5a_1+4b_1+3c_1+d_1=0 \\ 2a_1-b_1+c_1+d_1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5a_1+4b_1+3c_1-3a_1-c_1=0 \\ 2a_1-b_1+c_1-3a_1-c_1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a_1+4b_1+2c_1=0 \\ -a_1-b_1=0 \Rightarrow b_1=-a_1 \end{cases}$$

$$-2a_1+2c_1=0 \Rightarrow c_1=a_1$$
$$d_1=-4a_1$$
$$\pi_2 : a_1x-a_1y+a_1z-4a_1=0 \Rightarrow x-y+z-4=0$$

משוואת המישור xz : $y=0$, לכן: $\ell_2 : x+z-4=0$

$$\begin{cases} x=r \\ y=0 \\ z=4-r \end{cases} \Rightarrow \ell_2 : \underline{x} = (0,0,4)+r(1,0,-1)$$

המשך בעמוד הבא >>>

נבדוק האם $t \overset{?}{=} \alpha \cdot \underline{r}$: $(1,-1,0) \overset{?}{=} \alpha(1,0,-1) \Rightarrow -1=0 \Rightarrow \phi$

כלומר $t \neq \alpha \cdot \underline{r}$, והישרים ℓ_1 ו- ℓ_2 אינם מקבילים ואינם מתלכדים.

נבדוק האם לישרים ℓ_1 ו- ℓ_2 יש נקודה משותפת:

$$\begin{cases} t=r \\ -t=0 \\ 0=4-r \end{cases} \Rightarrow t=0 \ , \ r=0 \Rightarrow 0 \neq 4-0$$

כלומר לישרים אין אף נקודה משותפת והישרים מצטלבים.

(3) $(a>0)$

$$|z_2|=5 \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2}=5 \Rightarrow a^2+b^2=25 \quad ①$$

$$z_3=z_1 \cdot z_2 \Rightarrow c+ci=(-1+7i)(a+bi)$$

$$c+ci=(-a-7b)+i(-b+7a)$$

שני מספרים מרוכבים שווים אם החלקים הממשיים והמדומים שלהם שווים:

$$\begin{cases} -a-7b=c \\ 7a-b=c \end{cases} \Rightarrow -a-7b=7a-b \Rightarrow -6b=8a \Rightarrow b=-\tfrac{4}{3}a$$

נציב ב- ① ונקבל:

$$a^2+\tfrac{16}{9}a^2=25 \Rightarrow a^2=9 \Rightarrow a=\pm 3 \ , \ a>0 \Rightarrow a=3$$

$$b=-\tfrac{4}{3}\cdot 3=-4 \ , \ c=7\cdot 3-(-4)=25$$

(א) $z_2=3-4i \ , \ z_3=25+25i$

(ב) $a_1=i \ , \ a_3=3-4i \ , \ q=?$

$$q^2=\frac{a_3}{a_1} \Rightarrow q^2=\frac{3-4i}{i}=-4-3i$$

$$q=\sqrt{-4-3i}=A+Bi$$

$$A^2-B^2+2ABi=-4-3i$$

מכאן: $A^2-B^2=-4 \ , \ 2AB=-3$

המשך בעמוד הבא >>>

$B=-\frac{3}{2A}$

$A^2-\frac{9}{4A^2}=-4 \quad / \cdot 4A^2 \quad \Rightarrow \quad 4(A^2)^2+16(A^2)-9=0$

$(A^2)_{1,2}=\frac{-16\pm\sqrt{256+144}}{8}=\frac{-16\pm 20}{8}$

$A^2=-4.5 \quad \Rightarrow \quad \phi$ כי A הוא מספר ממשי

$A^2=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad A=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad B=\mp\frac{3}{\sqrt{2}}=\mp\frac{3\sqrt{2}}{2}$

מכאן: $q_{1,2}=\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}i\right)$

(4) (א) $f'(x)=n\cdot x^{n-1}\cdot e^{-kx}+x^n\cdot(-k\cdot e^{-kx})=$

$=x^{n-1}\cdot e^{-kx}\cdot(n-kx)$

$f'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad x^{n-1}\cdot e^{-kx}\cdot(n-kx)=0$

$e^{-kx}\neq 0$ לכל ערך של x, לכן: $x=0 \quad \Rightarrow \quad y=0$

$n-kx=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{n}{k} \quad \Rightarrow \quad y=\left(\frac{n}{k}\right)^n\cdot e^{-n}$

נתון כי n הוא זוגי, לכן $\left(\frac{n}{k}\right)^n>0$. כמו כן, $e^{-n}>0$ לכל n, לכן $y>0$.

x	$x<0$	$x=0$	$0<x<\frac{n}{k}$	$x=\frac{n}{k}$	$x>\frac{n}{k}$
f'(x)	−	0	+	0	−
f(x)	↘	min	↗	max	↘

$f'(-1)=(-1)^{\text{אי-זוגי}}\cdot(+)\cdot(n+k)<0$

$f'\left(\frac{n}{2k}\right)=(+)\cdot(+)\cdot\left(n-\frac{n}{2}\right)>0$

$f'\left(\frac{2n}{k}\right)=(+)\cdot(+)\cdot\left(n-2n\right)<0$

המשך בעמוד הבא >>>

$$y_{\min} = y(0) = 0$$

$$y_{\max} = y\left(\tfrac{n}{k}\right) = \left(\tfrac{n}{k}\right)^{n} \cdot e^{-n}$$

$$y_{\max} - y_{\min} = \left(\tfrac{n}{k}\right)^{n} \cdot e^{-n} - 0 = \frac{n^{n}}{k^{n}} \cdot \frac{1}{e^{n}} = \left(\frac{n}{ke}\right)^{n}$$

(ב) תחום הגדרה: $8^{x} - 2 > 0 \;\Rightarrow\; 2^{3x} > 2 \;\Rightarrow\; 3x > 1 \;\Rightarrow\; x > \frac{1}{3}$

$$y' = \frac{8^{x}\ln 8}{(8^{x}-2)\ln 4} - 2 = \frac{3\cdot 8^{x}\ln 2}{2\cdot \ln 2\cdot (8^{x}-2)} - 2$$

$$y' = 0 \;\Rightarrow\; \frac{3\cdot 8^{x}}{2\cdot(8^{x}-2)} - 2 = 0 \;\Rightarrow\; 3\cdot 8^{x} = 4\cdot 8^{x} - 8$$

$$8^{x} = 8 \;\Rightarrow\; x = 1$$

x	$\frac{1}{3} < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
f'(x)	+	0	−
f(x)	↗	max	↘

$$y'\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{3\cdot\sqrt{8}}{2\cdot(\sqrt{8}-2)} - 2 \approx 3.12 > 0$$

$$y'(2) = \frac{3\cdot 8^{2}}{2\cdot(8^{2}-2)} - 2 \approx -0.45 < 0$$

תשובה: $x_{\max} = 1$.

(5)

$y_B = 3 \Rightarrow 3 = \frac{6}{x-1} \Rightarrow x - 1 = 2 \Rightarrow x_B = 3$

$B(3,3) \Rightarrow x_A = 3$

$S_1 = 12\ln 2 \Rightarrow \int_3^{x_D} \frac{6}{x-1}dx = 12\ln 2$

$\left(6\ln|x-1|\right)\Big|_3^{x_D} = 12\ln 2 \Rightarrow \left(\ln|x-1|\right)\Big|_3^{x_D} = 2\ln 2$

$\ln|x_D - 1| - \ln 2 = 2\ln 2 \Rightarrow \ln|x_D - 1| = 3\ln 2 = \ln 8$

$|x_D - 1| = 8 \Rightarrow x_D - 1 = \pm 8$

$x_D - 1 = -8 \Rightarrow x_D = -7 \Rightarrow$ לא ייתכן, כי $x_D > 1$

$x_D - 1 = 8 \Rightarrow x_D = 9 \Rightarrow x_C = 9$

$y_C = \frac{6}{9-1} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

$S_1 = S_{\text{טרפז}} - S_2 = \frac{AB + DC}{2} \cdot AD - S_2 =$

$= \frac{3 + \frac{3}{4}}{2} \cdot (9-3) - 12\ln 2 = \frac{45}{4} - 12\ln 2 \approx 2.932$ יחידות שטח

גבי יקואל

משבצת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

◈ לכל הכיתות ◈ לכל השאלונים ◈ לכל הרמות