פתרון מבחן מס' 14 (ספר לימוד – שאלון 035807)

(1)

$CD = 2y_C \ , \ CD = 16 \ \Rightarrow \ y_C = 8$

$AB = 2y_B \ , \ AB = 8\sqrt{2} \ \Rightarrow \ y_B = 4\sqrt{2}$

הנקודות $B(x_B, 4\sqrt{2})$ ו- $C(x_C, 8)$ הן נקודות משותפות לפרבולה ולמעגל,

לכן :

$$\begin{cases} 64 = 2px_C \\ (x_C - 10)^2 + 64 = r^2 \\ 32 = 2px_B \\ (x_B - 10)^2 + 32 = r^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = \frac{32}{p} \\ \left(\frac{32}{p} - 10\right)^2 + 64 = r^2 \quad ① \\ x_B = \frac{16}{p} \\ \left(\frac{16}{p} - 10\right)^2 + 32 = r^2 \quad ② \end{cases}$$

נפתור את מערכת המשוואות ②+① :

$$\begin{cases} \left(\frac{32}{p} - 10\right)^2 + 64 = r^2 \\ \left(\frac{16}{p} - 10\right)^2 + 32 = r^2 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{32}{p} - 10\right)^2 + 64 = \left(\frac{16}{p} - 10\right)^2 + 32$$

$$\frac{1,024}{p^2} - \frac{640}{p} + 100 + 64 = \frac{256}{p^2} - \frac{320}{p} + 100 + 32$$

$$\frac{768}{p^2} - \frac{320}{p} + 32 = 0 \quad / \cdot \frac{p^2}{32} \neq 0$$

$$p^2 - 10p + 24 = 0 \ \Rightarrow \ p_{1,2} = \frac{10 \pm 2}{2}$$

$$p_1 = 6 \ \Rightarrow \ y^2 = 12x$$

$$p_2 = 4 \ \Rightarrow \ y^2 = 8x$$

(2) (א)

$$\overrightarrow{CS} \perp \overrightarrow{CB} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$$

$$\overrightarrow{CS} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AS} = -\underline{v} + \underline{w} = \underline{w} - \underline{v}$$

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = -\underline{v} + \underline{u} = \underline{u} - \underline{v}$$

$$(\underline{w} - \underline{v}) \cdot (\underline{u} - \underline{v}) = 0 \quad ①$$

$$\underline{u} \cdot \underline{w} - \underline{v} \cdot \underline{w} - \underline{u} \cdot \underline{v} + |\underline{v}|^2 = 0$$

$$|\underline{u}| \cdot |\underline{w}| \cdot \cos 45° - |\underline{v}| \cdot |\underline{w}| \cdot \cos 30° - |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \measuredangle CAB + |\underline{v}|^2 = 0$$

$$|\underline{u}| \cdot |\underline{w}| \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - |\underline{v}| \cdot |\underline{w}| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \measuredangle CAB + |\underline{v}|^2 = 0 \quad ②$$

$$\overrightarrow{AS} \perp \overrightarrow{CB} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{w} \cdot (\underline{u} - \underline{v}) = 0 \quad ③$$

נציב את ③ ב- ① ונקבל:

$$\cancel{\underline{w} \cdot (\underline{u} - \underline{v})} - \underline{v} \cdot (\underline{u} - \underline{v}) = 0$$

$$\underline{v} \cdot (\underline{u} - \underline{v}) = 0 \quad \Rightarrow \quad |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \measuredangle CAB - |\underline{v}|^2 = 0 \quad ④$$

נציב את ④ ב- ② ונקבל:

$$|\underline{u}| \cdot |\underline{w}| \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - |\underline{v}| \cdot |\underline{w}| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 0 = 0 \quad / : \tfrac{1}{2}|\underline{w}| \neq 0$$

$$|\underline{u}| \cdot \sqrt{2} - |\underline{v}| \cdot \sqrt{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{|\underline{v}|}{|\underline{u}|} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{6}$$

(ב) נחזור ל- ④ :

$$|\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \measuredangle CAB - |\underline{v}|^2 = 0 \quad / : |\underline{v}| \neq 0$$

$$|\underline{u}| \cdot \cos \measuredangle CAB = |\underline{v}|$$

$$\cos \measuredangle CAB = \frac{|\underline{v}|}{|\underline{u}|} = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad \Rightarrow \quad \measuredangle CAB \approx 35.26°$$

(3) (א)
$$z_{1,2}=\frac{-2-9i\pm\sqrt{4+36i-81-28i+92}}{2}=\frac{-2-9i\pm\sqrt{15+8i}}{2}=$$
$$=\frac{-2-9i\pm\sqrt{16+8i-1}}{2}=\frac{-2-9i\pm\sqrt{(4+i)^2}}{2}=\frac{-2-9i\pm 4+i}{2}$$
$$z_1=\frac{2-8i}{2}=1-4i\ ,\ \left|z_1\right|=\sqrt{1+16}=\sqrt{17}$$
$$z_2=\frac{-6-10i}{2}=-3-5i\ ,\ \left|z_2\right|=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$$

(ב)
$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{-3-5i}{1-4i}\cdot\frac{1+4i}{1+4i}=\frac{-3-12i-5i+20}{1+16}=\frac{17-17i}{17}=1-i$$

(ג) $a_1=1-4i$, $a_2=-3-5i$, לכן לפי סעיף (ב): $q=1-i$.
$$a_{10}=a_1\cdot q^9=(1-4i)\cdot(1-i)^9\quad(*)$$
$$(1-i)^2=1-2i-1=-2i\ ,\ (1-i)^4=(-2i)^2=-4\ ,$$
$$(1-i)^8=(-4)^2=16$$

נחזור ל- $(*)$ ונקבל:
$$a_{10}=(1-4i)\cdot(1-i)^9=(1-4i)\cdot16\cdot(1-i)=$$
$$=16\cdot(1-i-4i-4)=16\cdot(-3-5i)=-48-80i$$

(4) הגרפים של שתי הפונקציות חותכים את ציר ה- y באותה נקודה $(0,1)$.
הפונקציה $y=e^{ax}$ היא פונקציה עולה והפונקציה $y=e^{-ax}$ היא פונקציה יורדת. לכן:
$$S_1=\int_0^{2a}(e^{ax}-e^{-ax})\,dx=\left.\frac{e^{ax}}{a}+\frac{e^{-ax}}{a}\right|_0^{2a}=$$
$$=\left(\frac{e^{2a^2}}{a}+\frac{e^{-2a^2}}{a}\right)-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a}\left(e^{2a^2}+e^{-2a^2}-2\right)$$
$$S_2=\int_0^{2a}e^{-ax}\,dx=-\left.\frac{e^{-ax}}{a}\right|_0^{2a}=\frac{-e^{-2a^2}}{a}+\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\left(-e^{-2a^2}+1\right)$$

מהנתון $S_1=S_2$ נקבל:
$$e^{2a^2}+e^{-2a^2}-2=-e^{-2a^2}+1$$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

נסמן: $e^{2a^2}=t$ ונקבל את המשוואה:
$$t+\frac{1}{t}-2=-\frac{1}{t}+1 \quad / \cdot t$$
$$t^2+1-2t=-1+t$$

לאחר כינוס איברים, נקבל את המשוואה הריבועית:
$$t^2-3t+2=0$$

שפתרונותיה: $t_1=1$, $t_2=2$.

$e^{2a^2}=1 \Rightarrow a=0 \Rightarrow$ פתרון זה נפסל כי נתון ש- $a>0$

נקבל: $e^{2a^2}=2 \Rightarrow \ln e^{2a^2}=\ln 2 \Rightarrow 2a^2=\ln 2$

כלומר: $a=\sqrt{0.5\ln 2}$.

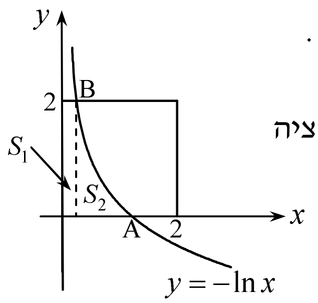
(5) (א)
$$f'(x)=1-\left(1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right)$$

כלומר:
$$f'(x)=-\ln x$$

מכיוון שמתקיים:
$$\int f'(x)\,dx=f(x)+\mathrm{c}$$

נסיק כי:
$$\int(-\ln x)\,dx=x-x\ln x+\mathrm{c}$$

(ב) שטח הריבוע: 4 יחידות שטח $=2\times2$.
נחשב את השטח של החלק השמאלי.
נמצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה
$y=-\ln x$ עם ציר ה- x (נקודה A)
ועם הישר $y=2$ (נקודה B).



$-\ln x=0 \Rightarrow x=1$, כלומר $A(1,0)$.

$-\ln x=2 \Rightarrow \ln x=-2$, כלומר $B\left(e^{-2},2\right)$.

מנקודה B נוריד אנך לציר ה- x ואז השטח השמאלי
מורכב מסכום השטחים S_1 ו- S_2 .
$$S_1=2\cdot e^{-2}=\frac{2}{e^2}$$

ניעזר בסעיף (א) ונקבל:
$$S_2=\int_{\frac{1}{e^2}}^{1}(-\ln x)\,dx=x-x\ln x\Big|_{\frac{1}{e^2}}^{1}=\left(1-1\ln 1\right)-\left(\frac{1}{e^2}-\frac{1}{e^2}\ln\frac{1}{e^2}\right)=$$
$$=\left(1-0\right)-\left(\frac{1}{e^2}-\frac{1}{e^2}\cdot(-2)\right)=1-\frac{3}{e^2}$$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

ואז: $1-\frac{1}{e^2}=\left(1-\frac{3}{e^2}\right)+\frac{2}{e^2}=$ השטח השמאלי

השטח הימני שווה ל- $3+\frac{1}{e^2}=\left(1-\frac{1}{e^2}\right)-4=$ השטח השמאלי $-\ 4$

מכאן נקבל שהיחס שבין השטח של החלק הגדול (החלק הימני)

לבין השטח של החלק הקטן (החלק השמאלי) הוא:

$$\frac{3+\frac{1}{e^2}}{1-\frac{1}{e^2}}=\frac{\frac{3e^2+1}{e^2}}{\frac{e^2-1}{e^2}}=\frac{3e^2+1}{e^2-1}$$

גבי יקואל

משבצת