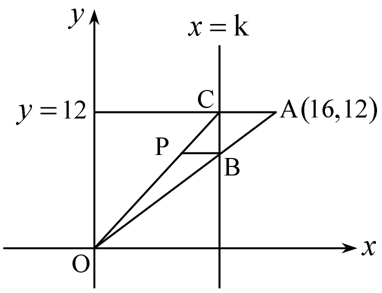
פתרון מבחן מס' 13 (ספר לימוד – שאלון 035807)

(1) נסמן $P(x_0, y_0)$.



מכיוון ש- PB מקביל לציר ה- x ,

הרי ששיעורי הנקודה B הן $B(k, y_0)$.

שיעורי הנקודה C הן $C(k,12)$.

נביע את k באמצעות x_0 ו- y_0 .

$$m_{AO} = m_{BO} \quad \Rightarrow \quad \frac{12}{16} = \frac{y_0}{k} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{16y_0}{12} = \frac{4y_0}{3}$$

$$m_{CO} = m_{PO} \quad \Rightarrow \quad \frac{12}{k} = \frac{y_0}{x_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{12}{\frac{4y_0}{3}} = \frac{y_0}{x_0} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 12x_0 = \frac{4{y_0}^2}{3} \quad \Rightarrow \quad {y_0}^2 = 9x_0$$

כלומר כל הנקודות P המתקבלות נמצאות על הפרבולה שמשוואתה $y^2 = 9x$.

(2) (א) נמצא את שיעורי קדקודי התיבה.

מהנתון $\overrightarrow{OB'} = (2,6,10)$ ו- $O(0,0,0)$ נסיק כי :

$A(2,0,0)$, $B(2,6,0)$, $C(0,6,0)$, $A'(2,0,10)$,

$C'(0,6,10)$, $O'(0,0,10)$.

ההצגה הפרמטרית של 'OB : $(0,0,0) + t(2,6,10)$, כלומר $t(1,3,5)$.

נמצא את משוואת המישור AA'C'C בעזרת שיעורי הנקודות

$A(2,0,0)$, $C(0,6,0)$, $A'(2,0,10)$.

ההצגה הפרמטרית של המישור היא :

$$(2,0,0) + r(-2,6,0) + s(0,0,10)$$

נמצא את המקדמים A , B ו- C של המישור AA'C'C

המיוצג על-ידי $Ax + By + Cz + D = 0$, כאשר מתקיימים :

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

© כל הזכויות שמורות להוצאת משבצת – (www.mishbetzet.co.il) – לספר לימוד לשאלון **035807**

$$\begin{cases}(-2,6,0)\cdot(A,B,C)=0\\(0,0,10)\cdot(A,B,C)=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-2A+6B=0\\10C=0\end{cases} \Rightarrow C=0\ ,\ A=3B$$

עבור $B=1$ נקבל: $C=0\ ,\ B=1\ ,\ A=3$,

כלומר משוואת המישור: $3x+y+D=0$.

נציב במשוואת המישור את שיעורי הנקודה A ונקבל:

$$3\cdot 2+0+D=0 \Rightarrow D=-6$$

כלומר משוואת המישור AA'C'C : $3x+y-6=0$.

למציאת הנקודה N נציב במשוואת המישור: $x=t\ ,\ y=3t\ ,\ z=5t$,

ונקבל: $3\cdot t+3t-6=0 \Rightarrow t=1$

כלומר, $N(1,3,5)$.

(ב) מכיוון שמשוואת המישור AA'C'C היא $3x+y-6=0$,

הרי שווקטור הכיוון של האנך למישור זה יהיה $(3,1,0)$.

הזווית שבין הוקטור $(3,1,0)$ ובין $\overrightarrow{OB'}=(2,6,10)$:

$$(3,1,0)\cdot(2,6,10)=\left|(3,1,0)\right|\cdot\left|(2,6,10)\right|\cdot\cos\alpha$$

$$6+6=\sqrt{3^2+1^2+0^2}\cdot\sqrt{2^2+6^2+10^2}\cos\alpha$$

$$12=\sqrt{10}\cdot\sqrt{140}\cdot\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\frac{12}{\sqrt{1,400}} \Rightarrow \alpha=71.29^\circ$$

(3) הפתרון לשאלה זו יעלה בימים הקרובים.

© כל הזכויות שמורות להוצאת משבצת (www.mishbetzet.co.il) – לספר לימוד לשאלון **035807**

(4) (א) $f'(x)=0 \;\Rightarrow\; 2(1-e^{-x})\cdot(-e^{-x})\cdot(-1)=0$

$2e^{-x}(1-e^{-x})=0$

$2e^{-x}>0$ לכל ערך של x , לכן :

$1-e^{-x}=0 \;\Rightarrow\; e^{-x}=1 \;\Rightarrow\; x=0$

$x=0 \;\Rightarrow\; y=(1-e^{0})^2=0$

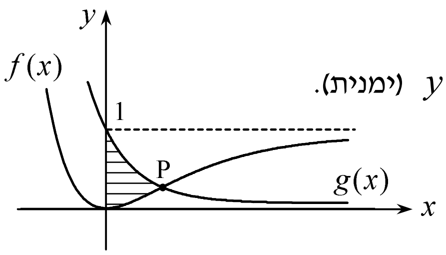
כלומר $(0,0)$ היא נקודה החשודה לקיצון.

x	x < 0	x = 0	x > 0
f′(x)	−	0	+
f(x)	↘	min	↗

$f'(-1)=(+)\cdot(1-e^{1})<0 \quad , \quad f'(1)=(+)\cdot(1-e^{-1})>0$

כלומר : $(0,0)$ היא נקודת המינימום של גרף הפונקציה.

(ב) נסרטט את הסקיצה של גרף הפונקציה, בעזרת העובדות הבאות :



תחומי עלייה וירידה : לפי הטבלה.

משוואת אסימפטוטה אופקית : $y=1$ (ימנית).

$f(x)=(1-e^{-x})^2\geq 0$

לכל ערך של x .

(ראו סרטוט משמאל).

(ג) $g(x)=e^{-2x}>0$ פונקציה מונוטונית יורדת. כמו כן : $g(0)=e^{0}=1$.

(i) שיעורי נקודת החיתוך של שני הגרפים :

$f(x)=g(x) \;\Rightarrow\; (1-e^{-x})^2=e^{-2x}$

$1-2e^{-x}+e^{-2x}=e^{-2x} \;\Rightarrow\; e^{-x}=\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; x=-\ln\frac{1}{2}=\ln 2$

$y=e^{-2\ln 2}=(e^{\ln 2})^{-2}=2^{-2}=\frac{1}{4}$

כלומר, נקודת החיתוך בין הגרפים היא $P\left(\ln 2,\frac{1}{4}\right)$.

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

© כל הזכויות שמורות להוצאת משבצת – (www.mishbetzet.co.il) – לספר לימוד לשאלון **035807**

$$S=\int_{0}^{x_P}[g(x)-f(x)]dx=\int_{0}^{\ln 2}\left[e^{-2x}-(1-e^{-x})^2\right]dx= \qquad (ii)$$

$$=\int_{0}^{\ln 2}(2e^{-x}-1)\,dx=(-2e^{-x}-x)\Big|_{0}^{\ln 2}=$$

$$=-2e^{-\ln 2}-\ln 2-(-2\cdot e^{0}-0)=-2\cdot\tfrac{1}{2}-\ln 2+2=$$

$$=(1-\ln 2)\approx 0.3069 \text{ יחידות שטח}$$

(5) נמצא את משוואת הישר. שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה

עם ציר ה- y (נסמנה ב- A): $x=0 \;\Rightarrow\; f(0)=\frac{1}{3e}$

שיפוע הישר: $f'(x)=\dfrac{2}{(3e-2x)^2}$

$$\text{m}=f'\left(\tfrac{e}{2}\right) \;\Rightarrow\; \frac{2}{(3e-e)^2}=\frac{1}{2e^2}$$

משוואת הישר: $y-\frac{1}{3e}=\frac{1}{2e^2}(x-0) \;\Rightarrow\; y=\frac{x}{2e^2}+\frac{1}{3e}$

שיעור ה- x של נקודת החיתוך השנייה

בין גרף הפונקציה והישר (נסמנה ב- B): $\dfrac{1}{3e-2x}=\dfrac{x}{2e^2}+\dfrac{1}{3e}$

$$\frac{1}{3e-2x}=\frac{3x+2e}{6e^2} \;\Rightarrow\; (3x+2e)(3e-2x)=6e^2$$

$$9ex-6x^2+6e^2-4ex=6e^2$$

$$6x^2-5xe=0 \;\Rightarrow\; x(6x-5e)=0$$

$$x_1=0 \;\Rightarrow\; \text{A מתאים לנקודה} \quad , \quad x_2=\frac{5e}{6} \;\Rightarrow\; \text{B מתאים לנקודה}$$

$$S=\int_{x_A}^{x_B}[y_{\text{ישר}}-f(x)]dx=\int_{0}^{\frac{5e}{6}}\left(\frac{x}{2e^2}+\frac{1}{3e}-\frac{1}{3e-2x}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^2}{4e^2}+\frac{x}{3e}+\frac{1}{2}\ln\left|3e-2x\right|\right)\Big|_{0}^{\frac{5e}{6}}=$$

$$=\frac{1}{4e^2}\left(\frac{25e^2}{36}-0\right)+\frac{1}{3e}\left(\frac{5e}{6}-0\right)+\frac{1}{2}\left(\ln\left|3e-2\cdot\frac{5e}{6}\right|-\ln\left|3e\right|\right)=$$

$$=\frac{25}{144}+\frac{5}{18}+\frac{1}{2}\ln\frac{\frac{4}{3}e}{3e}=\frac{65}{144}+\frac{1}{2}\ln\frac{4}{9}=\frac{65}{144}+\ln\frac{2}{3}\approx 0.046 \text{ יחידת שטח}$$

© כל הזכויות שמורות להוצאת משבצת (www.mishbetzet.co.il) – לספר לימוד לשאלון **035807**

גבי יקואל

משבצת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

◈ לכל הכיתות ◈ לכל השאלונים ◈ לכל הרמות