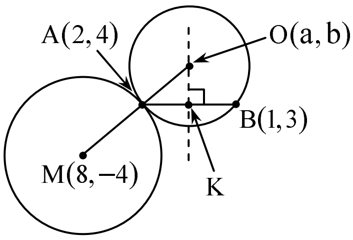
פתרון מבחן מס' 12 (ספר לימוד – שאלון 035807)

(1)

$$x^2+y^2-16x+8y-20=0$$
$$(x^2-16x+64)-64+(y^2+8y+16)-16-20=0$$
$$(x-8)^2+(y+4)^2=100$$

(א) במעגל הנתון: $M(8,-4)$, $R=10$.



משוואת המעגל המבוקש:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

אנך אמצעי למיתר AB עובר דרך מרכז המעגל O.

קטע מרכזים MO עובר דרך נקודת ההשקה A,

במילים אחרות, ישר העובר דרך הנקודות A ו- M עובר גם בנקודה O.

נמצא את שיעורי נקודת אמצע הקטע AB:

$$\begin{cases} x_K=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{2+1}{2}=1.5 \\ y_K=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{4+3}{2}=3.5 \end{cases} \Rightarrow K(1.5,3.5)$$

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{3-4}{1-2}=1 \Rightarrow m_{OK}\cdot m_{AB}=-1 \Rightarrow m_{OK}=-1$$

משוואת KO: $y-3.5=-(x-1.5) \Rightarrow y=-x+5$

$$m_{MA}=\frac{y_A-y_M}{x_A-x_M}=\frac{4+4}{2-8}=\frac{8}{-6}=-\frac{4}{3}$$

משוואת MA: $y+4=-\frac{4}{3}(x-8) \Rightarrow y=-\frac{4}{3}x+\frac{20}{3}$

שיעורי הנקודה O:

$$-x+5=-\frac{4}{3}x+\frac{20}{3} \quad /\cdot 3 \Rightarrow -3x+15=-4x+20$$

$$x=5 \Rightarrow y=-5+5=0 \Rightarrow O(5,0)$$

$$r^2=OB^2=(x_B-x_O)^2+(y_B-y_O)^2=(1-5)^2+(3-0)^2=25$$

משוואת מעגל O: $(x-5)^2+y^2=25$

המשך בעמוד הבא ➤➤➤

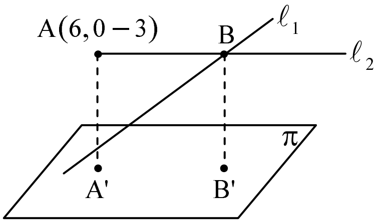
(ב) המשיק בנקודה A מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה, כלומר מאונך לרדיוס MA , ואז:

$$m_{\text{משיק}} \cdot m_{MA} = -1$$

$$m_{\text{משיק}} \cdot \left(-\tfrac{4}{3}\right) = -1 \quad \Rightarrow \quad m_{\text{משיק}} = \tfrac{3}{4}$$

משוואת המשיק המשותף: $y - 4 = \frac{3}{4}(x-2) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{4}x + 2\frac{1}{2}$

(2) (א) (*i*) שיעורי נקודה B הנמצאת על הישר ℓ_1 :



$$B(1+2t, 4-t, 2-2t)$$

נתון: $A(6,0,-3)$,

לכן וקטור הכיוון של ℓ_2 :

$$\underline{u} = B - A = (1+2t-6, 4-t-0, 2-2t+3) =$$
$$= (2t-5, 4-t, 5-2t)$$

(*ii*) הישר ℓ_2 מקביל למישור π , לכן מאונך לווקטור הנורמל למישור, כלומר: $\underline{\ell_2} \cdot \underline{h} = 0$

$$(2t-5, 4-t, 5-2t)\cdot(3,-4,1) = 0$$

$$6t - 15 - 16 + 4t + 5 - 2t = 0 \quad \Rightarrow \quad 8t = 26 \quad \Rightarrow \quad t = 3.25$$

$$B(1+2\cdot 3.25, 4-3.25, 2-2\cdot 3.25) \quad \Rightarrow \quad B(7.5, 0.75, -4.5)$$

(ב) אם הנקודות 'A ו- 'B הן הנקודות הקרובות ביותר ל- A ו- B בהתאמה, אז: $AA' \perp \pi$, $BB' \perp \pi$. כיוון ש- $AB \parallel \pi$, המרובע $ABB'A'$ הוא מלבן שהיקפו: $P = 2(AB + AA')$.

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} =$$
$$= \sqrt{1.5^2 + 0.75^2 + 1.5^2} = 2.25 \text{ יחידות אורך}$$

'AA הוא המרחק של הנקודה A מהמישור π , כלומר:

$$AA' = \frac{|3\cdot 6 - 4\cdot 0 - 3 - 10|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{26}} \text{ יחידות אורך}$$

$$P_{AA'B'B} = 2\left(2.25 + \frac{5}{\sqrt{26}}\right) \approx 6.46 \text{ יחידות אורך}$$

(3) (א) נסמן : $z = x + iy$, ואז :

$$x + iy - \sqrt{x^2 + y^2} + \mathrm{m}i + \mathrm{n} = 0$$

$$(x + \mathrm{n} - \sqrt{x^2 + y^2}) + i(y + \mathrm{m}) = 0$$

$$\begin{cases} x + \mathrm{n} - \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \\ y + \mathrm{m} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y = -\mathrm{m}$$

$$x + \mathrm{n} - \sqrt{x^2 + \mathrm{m}^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x + \mathrm{n} = \sqrt{x^2 + \mathrm{m}^2}$$

אם $x + \mathrm{n} > 0$ $(\mathrm{n} \neq 0)$ אז :

$$x^2 + 2x\mathrm{n} + \mathrm{n}^2 = x^2 + \mathrm{m}^2$$

$$x = \frac{\mathrm{m}^2 - \mathrm{n}^2}{2\mathrm{n}}$$

ואז :

$$z = x + iy = \frac{\mathrm{m}^2 - \mathrm{n}^2}{2\mathrm{n}} - \mathrm{m}i$$

נבדוק האם מתקיים התנאי : $x + \mathrm{n} > 0$:

$$x + \mathrm{n} \overset{?}{>} 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{m}^2 - \mathrm{n}^2}{2\mathrm{n}} + \mathrm{n} \overset{?}{>} 0$$

$$\mathrm{n} > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{m}^2 - \mathrm{n}^2 + 2\mathrm{n}^2 \overset{?}{>} 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{m}^2 + \mathrm{n}^2 > 0$$

(ב) (i) המשוואה $z - |z| + 5 = 0$ היא משוואה מסעיף (א) ,

כאשר $\mathrm{m} = 0$ ו- $\mathrm{n} = 5 > 0$, כלומר יש פתרון למשוואה זו

והוא : $z = \frac{0^2 - 5^2}{2 \cdot 5} - 0 \cdot i = -2.5$

(ii) המשוואה $z - |z| - 5 = 0$ היא גם משוואה מסעיף (א) ,

כאשר $\mathrm{m} = 0$ ו- $\mathrm{n} = -5$ (כלומר התנאי $\mathrm{n} > 0$ לא מתקיים).

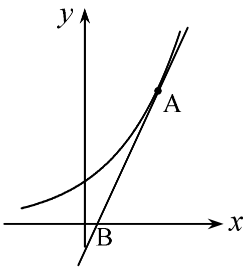
במקרה זה אי אפשר לפתור את המשוואה כי מתקיים $\mathrm{n} < 0$,

ופתרון המשוואה מסעיף (א) נכון רק עבור $\mathrm{n} > 0$.

במקרה בו $\mathrm{n} < 0$, למשוואה $x + \mathrm{n} = \sqrt{x^2}$ אין פתרון

במספרים ממשיים.

(4) $x_A = t \quad \Rightarrow \quad y_A = e^{\frac{t}{4}}$



(א) $y' = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{4}}$

$m_A = y'(t) = \frac{1}{4}e^{\frac{t}{4}}$

משוואת המשיק: $y - e^{\frac{t}{4}} = \frac{1}{4}e^{\frac{t}{4}}(x - t)$

$y = \frac{1}{4}e^{\frac{t}{4}}x - \frac{t}{4}e^{\frac{t}{4}} + e^{\frac{t}{4}}$

(ב) המשיק חותך את ציר ה- x בנקודה B.

$B(4,0) \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{1}{4}e^{\frac{t}{4}} \cdot 4 - \frac{t}{4}e^{\frac{t}{4}} + e^{\frac{t}{4}} \quad \Rightarrow \quad e^{\frac{t}{4}}\left(2 - \frac{t}{4}\right) = 0$

$e^{\frac{t}{4}} > 0$ לכל ערך של t, לכן: $2 - \frac{t}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 8$

ומשוואת המשיק היא: $y = \frac{e^2}{4}x - e^2$

$S = \int_0^{x_A}\left(e^{\frac{x}{4}} - y_{\text{משיק}}\right)dx = \int_0^8\left(e^{\frac{x}{4}} - \frac{e^2}{4}x + e^2\right)dx =$

$= \left(4e^{\frac{x}{4}} - \frac{e^2}{4}\cdot\frac{x^2}{2} + e^2x\right)\Big|_0^8 =$

$= 4(e^2 - e^0) - \frac{e^2}{8}(64 - 0) + e^2(8 - 0) =$

$= 4e^2 - 4 - 8e^2 + 8e^2 = 4(e^2 - 1) \approx 25.56$ יחידות שטח

(5) (א) תחום הגדרה:

$$\begin{cases} x>0 \\ \ln x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$$

(ב)

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x\ln^2 x}=\frac{\ln^2 x-1}{x\ln^2 x}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{\ln^2 x-1}{x\ln^2 x}=0 \Rightarrow \ln^2 x=1 \Rightarrow \ln x=\pm 1$$

$$\ln x=1 \Rightarrow x_1=e \Rightarrow y_1=1+\frac{1}{1}=2 \Rightarrow (e,2)$$

$$\ln x=-1 \Rightarrow x_2=\frac{1}{e} \Rightarrow y_2=-1+\frac{1}{-1}=-2 \Rightarrow \left(\frac{1}{e},-2\right)$$

x	$x=0$	$0<x<\frac{1}{e}$	$x=\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e}<x<1$
f′(x)	נקודת אי-הגדרה	+	0	−
f(x)		↗	max	↘

x	$x=1$	$1<x<e$	$x=e$	$x>e$
f′(x)	נקודת אי-הגדרה	−	0	+
f(x)		↘	min	↗

$$f'\left(\frac{1}{e^2}\right)=\frac{4-1}{+}>0 \qquad f'\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)=\frac{\frac{1}{4}-1}{+}<0$$

$$f'\left(e^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{\frac{1}{4}-1}{+}<0 \qquad f'\left(e^2\right)=\frac{4-1}{+}>0$$

תשובה: $\min(e,2)$, $\max\left(\frac{1}{e},-2\right)$.

(ג) לגרף הפונקציה ולישר $y=\mathrm{k}$ אין נקודות משותפות,

אם $y_{\max}<\mathrm{k}<y_{\min}$, כלומר עבור: $-2<\mathrm{k}<2$.

גבי יקואל

משבצת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929