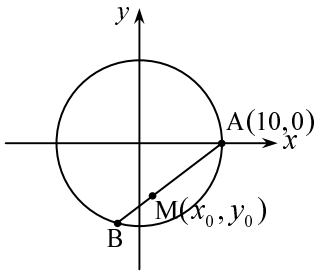


## פתרון מבחן מס' 11 (ספר לימוד – שאלון 035807)



$$AM = 2 \cdot BM \Rightarrow \frac{A-M}{M-B} = 2 \quad (א) \quad (1)$$

$$A - M = 2M - 2B \Rightarrow B = \frac{3M - A}{2}$$

$$x_B = \frac{3x_M - x_A}{2} = \frac{3x_0 - 10}{2}$$

$$y_B = \frac{3y_M - y_A}{2} = \frac{3y_0 - 0}{2}$$

כלומר:  $B\left(\frac{3x_0 - 10}{2}, \frac{3y_0}{2}\right)$  ( $x_0 \neq 10$ )

(ב) הנקודה B נמצאת על המעגל הנתון, לכן שיעורי מקיימים

את משוואת המעגל:  $x_B^2 + y_B^2 = 100$ . מכאן:

$$\frac{(3x_0 - 10)^2}{4} + \frac{(3y_0)^2}{4} = 100 \Rightarrow \left(x_0 - \frac{10}{3}\right)^2 + y_0^2 = \frac{400}{9}$$

קיבלנו:  $\left(x - \frac{10}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{400}{9}$ ,  $x \neq 10$

וזוהי משוואת מעגל שמרכזו נמצא בנקודה ששיעוריה  $\left(\frac{10}{3}, 0\right)$

ורדיוסו  $\frac{20}{3}$ .

**הערה:** המקום הגיאומטרי של הנקודות M הוא מעגל בלי נקודה אחת

שבה  $x = 10$ .

(2) נתון:  $\vec{AC} = \underline{a}$ ,  $\vec{BC} = \underline{b}$ ,  $\vec{FA} = \underline{u}$ ,  $\vec{EB} = \underline{v}$ ,

$\vec{AT} = \underline{t}$ ,  $\vec{TB} = \underline{t}$ ,  $\underline{b} \cdot \underline{v} = 0$ ,  $\underline{a} \cdot \underline{u} = 0$

$$\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB} = \underline{a} - \underline{b}$$

$$\vec{AT} = \frac{1}{2} \cdot \vec{AB} = \frac{1}{2} \underline{a} - \frac{1}{2} \underline{b}$$

$$\vec{CT} = \vec{CA} + \vec{AT} = -\underline{a} + \frac{1}{2} \underline{a} - \frac{1}{2} \underline{b} = -\frac{1}{2} \underline{a} - \frac{1}{2} \underline{b}$$

המשך בעמוד הבא <<<

$$\vec{GD} = \vec{GC} + \vec{CD} = \underline{u} - \underline{v}$$

$$\begin{aligned} \vec{CT} \cdot \vec{GD} &= \left(-\frac{1}{2}\underline{a} - \frac{1}{2}\underline{b}\right) \cdot (\underline{u} - \underline{v}) = -\frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}) \cdot (\underline{u} - \underline{v}) = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot (\cancel{\underline{a} \cdot \underline{u}} - \underline{a} \cdot \underline{v} + \underline{b} \cdot \underline{u} - \cancel{\underline{b} \cdot \underline{v}}) = -\frac{1}{2} \cdot (\underline{b} \cdot \underline{u} - \underline{a} \cdot \underline{v}) \quad (*) \end{aligned}$$

נסמן:  $\sphericalangle ACB = \alpha$ ,  $\sphericalangle ACD = 90^\circ + \alpha$ ,  $\sphericalangle GCB = 90^\circ + \alpha$  ואז:

$$GC = CA = FA \Rightarrow |\vec{GC}| = |\underline{u}| = |\underline{a}| \quad \text{כמו כן:}$$

$$DC = CB = EB \Rightarrow |\vec{DC}| = |\underline{v}| = |\underline{b}|$$

$$\begin{aligned} \vec{CT} \cdot \vec{GD} &= -\frac{1}{2} \cdot (\underline{b} \cdot \underline{u} - \underline{a} \cdot \underline{v}) = \quad \text{לכן, לפי (*) נקבל:} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot [|\underline{b}| \cdot |\underline{u}| \cdot \cos(180^\circ - \sphericalangle GCB) - |\underline{a}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos(180^\circ - \sphericalangle ACD)] = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot [|\underline{b}| \cdot |\underline{a}| \cdot \cos(90^\circ - \alpha) - |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos(90^\circ - \alpha)] = 0 \\ &\quad \text{קיבלנו: } \vec{CT} \cdot \vec{GD} = 0 \text{, לכן: } \vec{GD} \perp \vec{CT} \end{aligned}$$

$$(z - m)^3 = 64 \text{cis} 180^\circ \Rightarrow z - m = \sqrt[3]{64} \cdot \text{cis} \frac{180^\circ + 360^\circ k}{3} \quad (א) \quad (3)$$

$$z - m = 4 \text{cis}(60^\circ + 120^\circ k), \quad k = 0, 1, 2$$

$$z_1 = m + 4 \text{cis} 60^\circ = m + 4 \cdot \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = m + 2 + 2\sqrt{3}i$$

$$z_2 = m + 4 \text{cis} 180^\circ = m + 4 \cdot (-1) = m - 4$$

$$z_3 = m + 4 \text{cis} 300^\circ = m + 4 \cdot \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = m + 2 - 2\sqrt{3}i$$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = -72 \quad (ב)$$

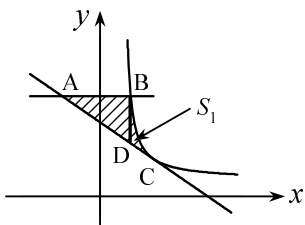
$$(m - 4) \cdot (m + 2 + 2\sqrt{3}i) \cdot (m + 2 - 2\sqrt{3}i) = -72$$

$$(m - 4) \cdot [(m + 2)^2 - (2\sqrt{3}i)^2] = -72$$

$$(m - 4) \cdot (m^2 + 4m + 4 + 12) = -72$$

$$(m - 4) \cdot (m^2 + 4m + 16) = -72$$

$$m^3 - 64 = -72 \Rightarrow m^3 = -8 \Rightarrow m = -2$$



(4) למציאת שיעור ה- $x$  של נקודה B, נפתור את המשוואה:  $1 = \frac{1}{2x-3}$  ונקבל  $x_B = 2$ . נתון כי  $x_C = 3.5$  ומכאן:  $y_C = \frac{1}{2 \cdot 3.5 - 3} = 0.25$ , כלומר  $C(3.5, 0.25)$ .

$$y' = \frac{-2}{(2x-3)^2}$$

$$y'(3.5) = \frac{-2}{(7-3)^2} = -\frac{1}{8}$$

$$y - 0.25 = -\frac{1}{8}(x - 3.5) \quad \text{לכן, משוואת המשיק היא:}$$

$$y = -\frac{1}{8}x + \frac{11}{16} \quad \text{כלומר:}$$

$$1 = -\frac{1}{8}x + \frac{11}{16} \quad \text{נפתור את המשוואה A של נקודה } x \text{ של נקודה A}$$

$$\text{ונקבל } x_A = -2.5$$

מנקודה B נעביר ישר המאונך לציר ה- $x$  וחותך את המשיק בנקודה D.

למציאת שיעור ה- $y$  של נקודה D נציב  $x = 2$  במשוואת הישר המשיק

$$y_D = -\frac{1}{8} \cdot 2 + \frac{11}{16} = \frac{7}{16} \quad \text{ונקבל:}$$

$$BD = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16} \quad \text{ואז:}$$

$$S_{\Delta ABD} = \frac{AB \cdot BD}{2} = \frac{4.5 \cdot \frac{9}{16}}{2} = \frac{81}{64} \quad \text{ולכן:}$$

$$S_1 = \int_2^{3.5} \left[ \frac{1}{2x-3} - \left( -\frac{1}{8}x + \frac{11}{16} \right) \right] dx = \quad \text{בנוסף:}$$

$$= \frac{\ln|2x-3|}{2} + \frac{x^2}{8 \cdot 2} - \frac{11x}{16} \Big|_2^{3.5} =$$

$$= \left( \frac{\ln 4}{2} + \frac{3.5^2}{16} - \frac{11 \cdot 3.5}{16} \right) - \left( \frac{\ln 1}{2} + \frac{4}{16} - \frac{22}{16} \right) =$$

$$= \frac{\ln 4}{2} - \frac{33}{64} = \frac{2 \ln 2}{2} - \frac{33}{64} = \ln 2 - \frac{33}{64}$$

בסך הכול, נקבל שהשטח המבוקש הוא:

$$S = \ln 2 - \frac{33}{64} + \frac{81}{64} = \ln 2 + 0.75 \quad \text{יחידות שטח}$$

(5) (א) מכיוון שלפונקציה יש נקודת מקסימום ב-  $A(0,2)$ , הרי ש-  $f'(0) = 0$  ו-  $f(0) = 2$ .

$$f'(x) = \int f''(x) dx = \int (3e^x - 9e^{3x}) dx$$

$$f'(x) = 3e^x - \frac{9e^{3x}}{3} + c_1$$

$$f'(x) = 3e^x - 3e^{3x} + c_1$$

$$f'(0) = 3e^0 - 3e^0 + c_1$$

$$0 = 3 - 3 + c_1 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$f'(x) = 3e^x - 3e^{3x} \quad \text{ואז:}$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (3e^x - 3e^{3x}) dx$$

$$f(x) = 3e^x - \frac{3e^{3x}}{3} + c_2$$

$$f(0) = 3e^0 - e^0 + c_2$$

$$2 = 3 - 1 + c_2 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$\text{כלומר: } f(x) = 3e^x - e^{3x}$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow 0 = 3e^x - e^{3x} \quad \text{(ב)}$$

$$0 = e^x (3 - e^{2x})$$

$$e^{2x} = 3 \Rightarrow 2x = \ln 3 \quad \text{לכן, } e^x > 0$$

$$x = \frac{1}{2} \ln 3 \quad \text{כלומר:}$$

כלומר, נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-  $x$  היא  $(\frac{1}{2} \ln 3, 0)$ .

המשך בעמוד הבא <<<

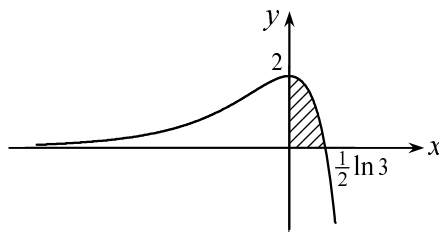
(ג) נוסף סרטוט של גרף הפונקציה:

$$V = \pi \int_0^{\frac{1}{2} \ln 3} (3e^x - e^{3x})^2 dx =$$

$$= \pi \int_0^{\frac{1}{2} \ln 3} (9e^{2x} - 6e^{4x} + e^{6x}) dx =$$

$$= \pi \left[ \frac{9e^{2x}}{2} - \frac{6e^{4x}}{4} + \frac{e^{6x}}{6} \right]_0^{\frac{1}{2} \ln 3} =$$

$$= \pi \left[ \left( \frac{9 \cdot 3}{2} - \frac{6 \cdot 9}{4} + \frac{27}{6} \right) - \left( \frac{9}{2} - \frac{6}{4} + \frac{1}{6} \right) \right] = \text{יחידות נפח} \frac{4\pi}{3}$$



**גבי יקואל**

**מ ש ב צ ת**

**[www.mishbetzet.co.il](http://www.mishbetzet.co.il)**

**טלפון: 04-8200929**

**ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה**

**לכל הכיתות ✦ לכל השאלונים ✦ לכל הרמות**