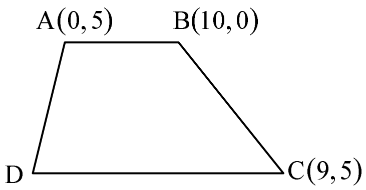
פתרון מבחן מס' 10 (ספר לימוד – שאלון 035807)



(1) $m_{AB}=\frac{0-5}{10-0}=-\frac{1}{2}$

$AB \parallel CD \Rightarrow m_{CD}=m_{AB}=-\frac{1}{2}$

משוואת DC : $y-5=-\frac{1}{2}(x-9)$

$y=-\frac{1}{2}x+\frac{19}{2}$

נסמן: $x_D=t$, מכאן: $y_D=\frac{19-t}{2}$, כלומר: $D\left(t,\frac{19-t}{2}\right)$.

$$S_{ABCD}=\frac{AB+CD}{2}\cdot h \quad (*)$$

$$AB=\sqrt{(0-10)^2+(5-0)^2}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$$ יחידות אורך

$$CD=\sqrt{(t-9)^2+\left(\frac{19-t}{2}-5\right)^2}=\sqrt{(t-9)^2+\frac{(9-t)^2}{4}}=$$

$$=\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{(t-9)^2}}{2}=\frac{\sqrt{5}\,|t-9|}{2}$$ יחידות אורך

$CD: x+2y-19=0$

$AB: x+2y-10=0$

גובה הטרפז הוא מרחק הנקודה $(0,5)$ מהבסיס CD .

$$d=h_{\text{טרפז}}=\frac{|10-19|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{9}{\sqrt{5}}$$ יחידות אורך

נציב את הביטויים שקיבלנו ב- $(*)$ ונתייחס לנתון $S_{ABCD}=36$.

$$\frac{5\sqrt{5}+|t-9|\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}}{2}\cdot\frac{9}{\sqrt{5}}=36 \Rightarrow \frac{10+|t-9|}{4}=4 \Rightarrow |t-9|=6$$

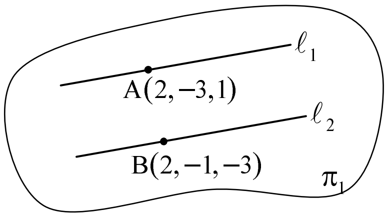
$t-9=6 \Rightarrow t=15 \Rightarrow D_1(15,2)$

$t-9=-6 \Rightarrow t=3 \Rightarrow D_2(3,8)$

הנקודות B ו- D נמצאות בצדדים שונים מהאלכסון AC שמשוואתו $y=5$.

$y_{AC}=5$, לכן הנקודה $B(10,0)$ נמצאת מתחת ל- AC ,

לכן הנקודה D צריכה להיות מעל AC , כלומר $y_D>5$, ולכן: $D(3,8)$.



(2) $\ell_1: \quad \underline{x} = (2,-3,1) + t(3,-2,1)$

$\ell_2: \quad \underline{x} = (2,-1,-3) + r(3,-2,1)$

(א) נמצא וקטור נורמלי למישור π_1 .

אם הוקטור $\underline{h}$ מאונך למישור π_1 ,

אז הוא מאונך לכל וקטור הנמצא במישור :

$$\begin{cases} \underline{h} \perp (3,-2,1) \\ \underline{h} \perp \overrightarrow{AB} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AB} = (2-2, -1+3, -3-1) = (0,2,-4) = \alpha(0,1,-2)$$

מכפלה סקלרית של וקטורים מאונכים שווה ל- 0 .

נסמן : $\underline{h} = (a,b,c)$ ונקבל:

$$\begin{cases} (a,b,c)\cdot(3,-2,1) = 0 \\ (a,b,c)\cdot(0,1,-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a - 2b + c = 0 \\ b - 2c = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 2c \end{cases}$$

$$3a - 4c + c = 0 \quad \Rightarrow \quad a = c$$

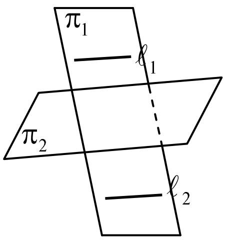
משוואת מישור π_1 :

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \Rightarrow \quad cx + 2cy + cz + d = 0$$

הנקודה A נמצאת במישור π_1 , לכן היא מקיימת את משוואתו :

$$2c - 6c + c + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 3c$$

$$\pi_1 : cx + 2cy + cz + 3c = 0 \quad \Rightarrow \quad x + 2y + z + 3 = 0$$



(ב) (i) אם מישור π_2 מקביל ל- ℓ_1 ,

אז אחד מוקטורי הכיוון של π_2

הוא וקטור כיוון של ℓ_1 : $(3,-2,1)$.

$\pi_2 \perp \pi_1$, לכן וקטור נורמל

למישור π_1 $(1,2,1)$

הוא וקטור כיוון של המישור π_2 .

המשך בעמוד הבא ›››

נסמן וקטור המאונך למישור π_2 על-ידי (a,b,c) ונקבל:

$$\begin{cases}(a,b,c)\cdot(3,-2,1)=0 & \Rightarrow\quad 3a-2b+c=0\\ (a,b,c)\cdot(1,2,1)=0 & \Rightarrow\quad a+2b+c=0\end{cases}$$

נחבר אגפים מתאימים בשתי המשוואות ונקבל:

$$4a+2c=0 \quad\Rightarrow\quad c=-2a$$

$$3a-2b-2a=0 \quad\Rightarrow\quad b=\frac{a}{2}$$

כלומר: $(a,b,c)=(a,\frac{a}{2},-2a)=\frac{1}{2}a\,(2,1,-4)$

ולכן הוקטור $(2,1,-4)$ מאונך למישור π_2.

(*ii*) משוואת המישור π_2: $2x+y-4z+d=0$

$\ell_1 \parallel \pi_2\ ,\ \ell_2 \parallel \pi_2$

מרחק ℓ_1 ממישור π_2: $\dfrac{|2\cdot2-3-4\cdot1+d|}{\sqrt{2^2+1^2+4^2}}=\dfrac{|d-3|}{\sqrt{21}}$

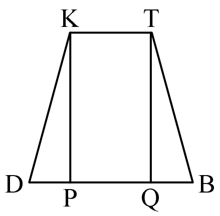
מרחק ℓ_2 ממישור π_2: $\dfrac{|2\cdot2-1-4\cdot(-3)+d|}{\sqrt{2^2+1^2+4^2}}=\dfrac{|d+15|}{\sqrt{21}}$

לפי הנתון: $\dfrac{|d-3|}{\sqrt{21}}=\dfrac{|d+15|}{\sqrt{21}} \quad\Rightarrow\quad |d-3|=|d+15|$

$d-3=d+15 \quad\Rightarrow\quad -3=15 \quad\Rightarrow$ אין פתרון

$$3-d=d+15 \quad\Rightarrow\quad d=-6$$

משוואת המישור π_2: $2x+y-4z-6=0$



(3) $D'K=3\cdot C'K\ ,\ B'T=3\cdot C'T$,

מכאן: $KC'=TC'=\frac{1}{4}a\ ,\ B'T=D'K=\frac{3}{4}a$.

(א) לפי משפט פיתגורס במשולש ישר-זווית KTC' ($\measuredangle C'=90^\circ\ ,\ KC'=C'T$):

$$KT^2=(KC')^2+(TC')^2 \quad\Rightarrow\quad KT=\sqrt{\frac{a^2}{16}+\frac{a^2}{16}}=\frac{a\sqrt{2}}{4}$$

אלכסוני הריבוע $ABCD$: $BD=AB\cdot\sqrt{2}=a\sqrt{2}$

המשך בעמוד הבא >>>

לפי משפט פיתגורס במשולש ישר-זווית $DD'K$ ($\measuredangle D' = 90°$):

$$DK^2 = DD'^2 + D'K^2 \quad \Rightarrow \quad DK = \sqrt{a^2 + \frac{9}{16}a^2} = \frac{5a}{4}$$

$\Delta DD'K \cong \Delta BB'T$ לפי משפט חפיפה צ.ז.צ. :

$$D'K = B'T \;,\; \measuredangle D' = \measuredangle B' \;,\; DD' = BB'$$

לכן: $DK = BT$, מכאן ש- $BDKT$ הוא טרפז שווה-שוקיים,

ואז $\Delta DKP \cong \Delta BTQ$ (לפי משפט חפיפה: צלע, צלע והזווית

מול הצלע הגדולה: $DK = BT$, $KP = TQ$, $\measuredangle P = \measuredangle Q = 90°$)

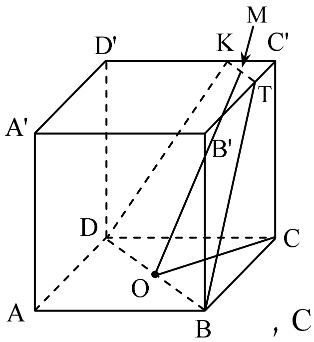
מכאן:

$$DP = \frac{1}{2}(DB - KT) \quad \Rightarrow \quad DP = \frac{a\sqrt{2} - \frac{a\sqrt{2}}{4}}{2} = \frac{3a\sqrt{2}}{8}$$

לפי משפט פיתגורס ב- ΔDPK :

$$KD^2 = DP^2 + KP^2$$

$$KP = \sqrt{KD^2 - DP^2} = \sqrt{\frac{25}{16}a^2 - \frac{9}{32}a^2} = \frac{a\sqrt{41}}{4\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{82}}{8} \approx 1.132a$$



(ב) בטרפז $DBTK$ מאמצע הבסיס DB

נעביר: $OM \perp KT$.

OM הוא גובה הטרפז, לכן:

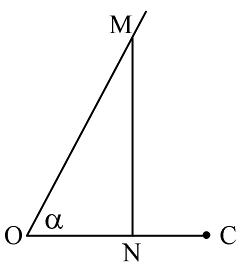
$$OM = KP = \frac{a\sqrt{82}}{8}$$

אלכסוני הריבוע $ABCD$ חוצים זה את זה,

שווים זה לזה ומאונכים זה לזה, לכן: $CO \perp DB$,

כלומר: $MO \perp DB$ ו- $CO \perp DB$,

לכן $\measuredangle MOC$ היא הזווית המבוקשת.

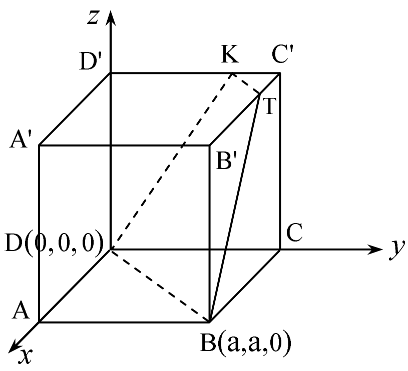


נסמן: $\measuredangle MOC = \alpha$. נעביר: $MN \perp OC$.

במשולש ΔOMN : $\sin\alpha = \frac{MN}{OM}$

$$\sin\alpha = \frac{a \cdot 8}{a\sqrt{82}} = \frac{8}{\sqrt{82}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 62.06°$$.

המשך בעמוד הבא ◄◄◄



ג) $B(a,a,0)\ ,\ D(0,0,0)$

הנקודה K נמצאת במישור D'C'CD ,

לכן $x_K = 0$.

$$y_K = D'K = \tfrac{3}{4}a$$

$$z_K = DD' = a$$

מכאן: $K\left(0,\tfrac{3}{4}a,a\right)$.

הנקודות K , B ו- D קובעות את המישור DBTK .

$$\overrightarrow{DK} = (x_K - x_D, y_K - y_D, z_K - z_D) = $$
$$= \left(0-0,\tfrac{3}{4}a-0,a-0\right) = \left(0,\tfrac{3}{4}a,a\right)$$
$$\overrightarrow{DB} = (x_B - x_D, y_B - y_D, z_B - z_D) = $$
$$= \left(a-0,a-0,0-0\right) = \left(a,a,0\right)$$

מכאן, ההצגה הפרמטרית של המישור DBTK :

$$\pi\ :\ \underline{x} = \left(0,0,0\right) + t\left(0,\tfrac{3}{4}a,a\right) + r\left(a,a,0\right)$$

או: $\pi\ :\ \underline{x} = (0,0,0) + t(0,3,4) + r(1,1,0)$

נסמן את משוואת המישור DBTK על-ידי: $ax + by + cz + d = 0$

$$(a,b,c)\cdot(0,3,4) = 0 \ \Rightarrow\ 3b + 4c = 0 \ \Rightarrow\ c = -\tfrac{3}{4}b$$

$$(a,b,c)\cdot(1,1,0) = 0 \ \Rightarrow\ a + b = 0 \ \Rightarrow\ a = -b$$

כלומר: $(a,b,c) = \left(-b,b,-\tfrac{3}{4}b\right) = \tfrac{1}{4}\left(-4,4,-3\right)$

מכאן, משוואת המישור: $-4x + 4y - 3z + d = 0$

הנקודה $D(0,0,0)$ נמצאת במישור זה, כלומר שיעוריה מקיימים את משוואת המישור, מכאן $d = 0$ ומשוואת המישור:

$$BDKT\ :\ -4x + 4y - 3z = 0$$

(4) תחום ההגדרה של הפונקציה: $x-3>0 \;\Rightarrow\; x>3$

נסמן את נקודת הפיתול של הפונקציה ב- x_0 , ואז לפי הנתון:

$$f'(x_0)=4+\ln 9 \quad , \quad f''(x_0)=0 \quad , \quad f'''(x_0)\neq 0$$

(א)

$$f'(x)=a\cdot\left[\ln(x-3)+\frac{x}{x-3}\right]$$

$$f''(x)=a\cdot\left[\frac{1}{x-3}+\frac{1\cdot(x-3)-x\cdot 1}{(x-3)^2}\right]=a\cdot\frac{x-3-3}{(x-3)^2}=a\cdot\frac{x-6}{(x-3)^2}$$

$$f''(x)=0 \;\Rightarrow\; a\cdot\frac{x-6}{(x-3)^2}=0 \;\Rightarrow\; x=6$$

$$f''(4)=a\cdot\frac{4-6}{+}=\frac{-2a}{+} \quad , \quad f''(7)=a\cdot\frac{7-6}{+}=\frac{a}{+}$$

הנגזרת השנייה שינתה את סימנה, לכן בנקודה $x_0=6$ לפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול.

$$f'(6)=4+\ln 9 \;\Rightarrow\; a\cdot\left[\ln(6-3)+\frac{6}{6-3}\right]=4+\ln 9$$

$$a\cdot(\ln 3+2)=4+\ln 9=4+2\ln 3=2\cdot(2+\ln 3)$$

$(2+\ln 3)\neq 0$, לכן: $a=2$.

(ב) תחום הגדרה: $x>3$.

(ג) $x=0$ אינו שייך לתחום ההגדרה, לכן לגרף הפונקציה אין נקודת חיתוך עם ציר ה- y .

נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x :

$$f(x)=0 \;\Rightarrow\; 2x\ln(x-3)=0 \;\Rightarrow\; x=0 \text{ או } \ln(x-3)=0$$

$x=0$ אינו שייך לתחום ההגדרה. מכאן:

$$\ln(x-3)=0 \;\Rightarrow\; x-3=1 \;\Rightarrow\; x=4 \;\Rightarrow\; (4,0)$$

(ד) לפי חקירת $f''(x)$ בסעיף (א):

x	3 < x < 6	x = 6	x > 6
f''(x)	−		+
f(x)	∩		∪

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

$f''(4) = -\frac{2 \cdot 2}{+} < 0 \quad , \quad f''(7) = \frac{2}{+} > 0$

תשובה: הפונקציה קעורה כלפי מעלה $\cup$ עבור $x > 6$,

הפונקציה קעורה כלפי מטה $\cap$ עבור $3 < x < 6$.

(ה) הפונקציה מוגדרת לכל $x > 3$ וכמו-כן $f'(x) \neq 0$ לכל $x > 3$.

$f'(4) = 2 \cdot \left(\ln 1 + \frac{2}{4-3}\right) = 4 > 0$

לכן לכל $x > 3$ נקבל $f'(x) > 0$, לכן הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

(5) (א) נתון: $f'(x_0) = e$

$f'(x) = 2e^{2x+1} - e^{x+1}$

$2e^{2x_0+1} - e^{x_0+1} = e \quad / : e \quad \Rightarrow \quad 2e^{2x_0} - e^{x_0} = 1$

נסמן: $e^{x_0} = \mathrm{a}$ ואז: $2\mathrm{a}^2 - \mathrm{a} - 1 = 0$

$\mathrm{a}_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{a}_1 = 1 \; , \; \mathrm{a}_2 = -\frac{1}{2}$

$e^{x_0} = -\frac{1}{2}$ לא ייתכן, כי $e^x > 0$ לכל x , לכן הפתרון $\mathrm{a}_2 = -\frac{1}{2}$ נפסל.

$e^{x_0} = 1 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = e^1 - e^1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (0,0)$

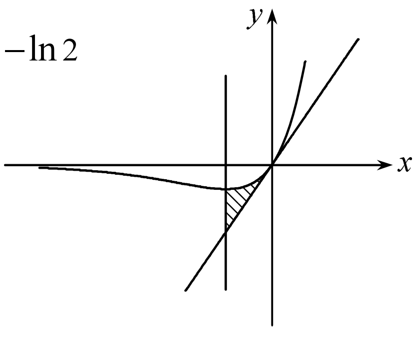
משוואת המשיק: $\mathrm{m} = e \quad \Rightarrow \quad y = ex$

(ב) נמצא את שיעור ה- x של נקודת המינימום של הפונקציה:

$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2e^{2x+1} - e^{x+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{x+1} \cdot (2e^x - 1) = 0$

$e^{x+1} = 0 \quad \Rightarrow$ נפסל כי $e^x > 0$ לכל x

$2e^x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad e^x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$



$S = \int_{-\ln 2}^{0} (e^{2x+1} - e^{x+1} - ex)\,dx =$

$= \left(\frac{1}{2}e^{2x+1} - e^{x+1} - \frac{ex^2}{2}\right)\Big|_{-\ln 2}^{0} =$

$= \frac{e}{2} - e - 0 - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{e}{4} - \frac{e}{2} - \frac{e}{2}\ln^2 2\right) =$

$= -\frac{e}{2} + \frac{3e}{8} + \frac{e}{2}\ln^2 2 = \frac{e}{2}\left(\ln^2 2 - \frac{1}{4}\right) \approx 0.313$ יחידות שטח

גבי יקואל

משבצת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

◈ לכל הכיתות ◈ לכל השאלונים ◈ לכל הרמות