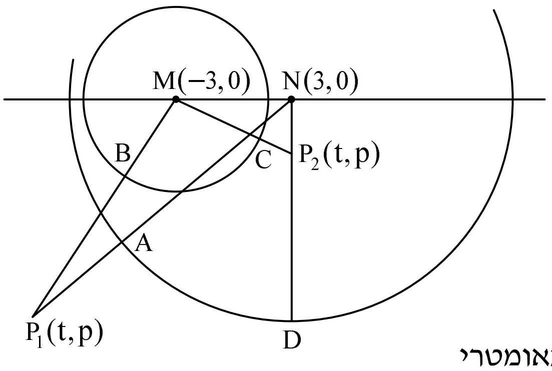
פתרון מבחן מס' 9 (ספר לימוד – שאלון 035807)

(1) נסמן את המעגלים ב-



$N\ :\ (x-3)^2+y^2=81$

ואז: $R_N=9$,

ו- $M\ :\ (x+3)^2+y^2=1$

ואז $r_M=1$.

ישנן שתי אפשרויות:

הנקודה האופיינית של המקום הגאומטרי

נמצאת מחוץ למעגל הגדול N או בתוכו.

① נסמן ב- $P_1(t,p)$ נקודה הנמצאת מחוץ למעגל N .

מרחק הנקודה P_1 עד המעגל N :

$$P_1A=P_1N-R_N=\sqrt{(t-3)^2+p^2}-9$$

מרחק הנקודה P_1 עד המעגל M :

$$P_1B=P_1M-r_M=\sqrt{(t+3)^2+p^2}-1$$

לפי הנתון נקבל:

$$\sqrt{(t-3)^2+p^2}-9=\sqrt{(t+3)^2+p^2}-1$$

$$\sqrt{(t-3)^2+p^2}=\sqrt{(t+3)^2+p^2}+8$$

$$t^2-6t+9+p^2=t^2+6p+9+p^2+16\sqrt{(t+3)^2+p^2}+64$$

$$16\sqrt{(t+3)^2+p^2}=-12t-64\ \ \Rightarrow\ \ 4\sqrt{(t+3)^2+p^2}=-3t-16$$

האגף השמאלי של השוויון הוא אי-שלילי, לכן:

$$-3t-16\ge 0\ \ \Rightarrow\ \ t\le\frac{-16}{3}$$

עכשיו ניתן להעלות בריבוע את שני האגפים של השוויון. נקבל:

$$16(t^2+6t+9+p^2)=9t^2+96t+256$$

$$7t^2+16p^2=112$$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

אם $t \le \frac{-17}{3}$, אז: $t^2 \ge \frac{289}{9}$, $7t^2 \ge \frac{2,023}{9} > 224$

$224 > 112$, p^2 לא יכול להיות קטן מאפס,

לכן לא ייתכן שהנקודה האופיינית נמצאת מחוץ למעגל הגדול N .

② $P_2(t,p)$. $P_2C = P_2D$

$$\sqrt{(t+3)^2 + p^2} - 1 = 9 - \sqrt{(t-3)^2 + p^2}$$

$$\sqrt{(t+3)^2 + p^2} = 10 - \sqrt{(t-3)^2 + p^2}$$

אגף שמאל חיובי, לכן: $\sqrt{(t-3)^2 + p^2} < 10 \Rightarrow (t-3)^2 + p^2 < 100$

תנאי זה מתקיים, כי הנקודה P_2 נמצאת בתוך עיגול שמרכזו $(3,0)$

ורדיוסו 10 . לכן אפשר להעלות בריבוע את שני אגפי השוויון. נקבל:

$$(t+3)^2 + p^2 = 100 - 20\sqrt{(t-3)^2 + p^2} + (t-3)^2 + p^2$$

$$t^2 + 6t + 9 = 100 - 20\sqrt{(t-3)^2 + p^2} + t^2 - 6t + 9$$

$$20\sqrt{(t-3)^2 + p^2} = 100 - 12t$$

$$5\sqrt{(t-3)^2 + p^2} = 25 - 3t$$

$$25 - 3t > 0 \quad \Rightarrow \quad t < \frac{25}{3}$$

$$25(t^2 - 6t + 9 + p^2) = 625 - 150t + 9t^2$$

$$16t^2 + 25p^2 = 400 \quad \Rightarrow \quad 16x^2 + 25y^2 = 400 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

באליפסה שמשוואתה מצאנו, $-5 \le x \le 5$,

לכן התנאי $x < \frac{25}{3}$ מתקיים.

(2) (א) $\ell_1(AB)\ :\ \underline{x}=(1,-2,3)+t\cdot\overrightarrow{AB}=(1,-2,3)+t\cdot(4,-3,1)$

M היא נקודה על הישר ℓ_1 , לכן: $M(1+4t,-2-3t,3+t)$

$PM\perp\ell_1\ \Rightarrow\ \overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

$P(-5,3,-10)\ \Rightarrow\ \overrightarrow{PM}=(4t+6,-3t-5,t+13)$

$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{AB}=0\ \Rightarrow\ (4t+6,-3t-5,t+13)\cdot(4,-3,1)=0$

$16t+24+15+9t+13+t=0\ \Rightarrow\ 26t=-52\ \Rightarrow\ t=-2$

$M(1-8,-2+6,3-2)\ \Rightarrow\ M(-7,4,1)\ \Rightarrow\ \overrightarrow{PM}=(-2,1,11)$

$\ell_2\ :\ \underline{x}=(-5,3,-10)+r(-2,1,11)$

(ב) (i) אורך צלע הריבוע:

$AM=\sqrt{(1+7)^2+(-2-4)^2+(3-1)^2}=\sqrt{104}$ יחידות אורך

אורך המקצוע הצדדי:

$PM=\sqrt{(-5+7)^2+(3-4)^2+(-10-1)^2}=\sqrt{126}$ יחידות אורך

נפח התיבה: $V=AM^2\cdot MP=104\cdot\sqrt{126}\approx 1{,}167.4$ יחידות נפח

(ii) PM הא נורמל למישור AMCD , לכן: $\overrightarrow{PM}=(-2,1,11)$

$AMCD\ :\ 2x-y-11x+d=0$

הנקודה $M(-7,4,1)$ נמצאת במישור AMCD ,

לכן שיעוריה מקיימים את משוואת המישור:

$2\cdot(-7)-4-11\cdot1+d=0\ \Rightarrow\ d=29$

מכאן: $AMCD\ :\ 2x-y-11x+29=0$

$A'PC'D'\ :\ 2x-y-11z+d_1=0$

הנקודה $P(-5,3,-10)$ נמצאת במישור A'PC'D' , לכן שיעוריה

מקיימים את משוואת המישור:

$2\cdot(-5)-3-11\cdot(-10)+d_1=0\ \Rightarrow\ d_1=-97$

משוואת המישור A'PC'D' : $2x-y-11z-97=0$

(3) נסמן: $z_1 = a_1 + ib_1 \ , \ z_2 = a_2 + ib_2 \ , \ b_1, b_2 \neq 0$

(א) נתון: $z_1 + z_2 = \mathrm{Re}$, מכאן:

$$(a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad b_1 + b_2 = 0 \quad ①$$

נתון גם: $z_1 \cdot z_2 = \mathrm{Re}$, מכאן:

$$(a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1b_2 + a_2b_1 = 0 \quad ②$$

לפי משוואה ① : $b_2 = -b_1$

נציב במשוואה ② : $-a_1b_1 + a_2b_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad b_1(a_2 - a_1) = 0$

נתון כי $b_1 \neq 0$, לכן: $a_2 - a_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_2 = a_1$

מכאן: $z_1 = a_1 + ib_1$

$$z_2 = a_2 + ib_2 = a_1 - ib_1$$

כלומר: $z_1 = \overline{z_2}$.

(ב) נתון: $a_1 = i \ , \ a_2 = -1 - i$.

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-1-i}{i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{-i+1}{-1} = -1 + i$$

$$a_{11} = a_1 \cdot q^{10} = i \cdot (-1+i)^{10}$$

$$(-1+i)^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$$

$$(-1+i)^4 = (-2i)^2 = -4$$

$$(-1+i)^8 = (-4)^2 = 16$$

$$(-1+i)^{10} = (-1+i)^8 \cdot (-1+i)^2 = 16 \cdot (-2i) = -32i$$

$$a_{11} = i \cdot (-1+i)^{10} = i \cdot (-32i) = 32$$

(4)

$$\begin{array}{l} \quad\quad x-\ 3 \\ \overline{x^2-6x+10}\big|\ x-3 \\ \underline{x^2-3x} \\ \quad -3x+10 \\ \underline{\quad -3x+\ 9} \\ \quad\quad\quad 1 \end{array}$$

כלומר: $y=\frac{x^2-6x+10}{x-3}=x-3+\frac{1}{x-3}$

(א) $(i)+(ii)$ תחום הגדרה: $x\neq 3 \Rightarrow x-3\neq 0$.

משוואת אסימפטוטה אנכית: $x=3$.

אין אסימפטוטות אופקיות.

$$y'=\left(x-3+\frac{1}{x-3}\right)'=1-\frac{1}{(x-3)^2}$$

$$y'=0 \Rightarrow 1-\frac{1}{(x-3)^2}=0 \Rightarrow (x-3)^2=1$$

$$x-3=1 \Rightarrow x=4 \Rightarrow y=1+\frac{1}{1}=2 \Rightarrow (4,2)$$

$$x-3=-1 \Rightarrow x=2 \Rightarrow y=-1+\frac{1}{-1}=-2 \Rightarrow (2,-2)$$

x	x < 2	x = 2	2 < x < 3	x = 3
y′	+	0	−	נקודת אי-הגדרה
y	↗	max	↘	

x	3 < x < 4	x = 4	x > 4
y′	−	0	+
y	↘	max	↗

$$y'(0)=1-\frac{1}{9}>0\ ,\ y'(2.5)=1-\frac{1}{0.25}<0$$

$$y'(3.5)=1-\frac{1}{0.25}<0\ ,\ y'(5)=1-\frac{1}{4}>0$$

תשובה: $\min(4,2)\ ,\ \max(2,-2)$.

(iii) ראו סרטוט בספר הלימוד, עמוד **1,108** .

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(ב) משוואת המשיק בנקודת המקסימום: $y=-2$.

$$S=\int_0^2\left[-2-\left(x-3+\frac{1}{x-3}\right)\right]dx=\int_0^2\left(1-x-\frac{1}{x-3}\right)dx=$$

$$=\left(x-\frac{x^2}{2}-\ln|x-3|\right)\Big|_0^2=2-2-\ln 1-(0-0-\ln 3)=$$

$= \ln 3$ יחידות שטח

(5) (א) תחום הגדרה: $e^x-1>0 \;\Rightarrow\; e^x>1 \;\Rightarrow\; x>0$

(ב) $f'(x)=2\cdot\frac{e^x}{e^x-1}+e^x-6$

$$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; 2\cdot\frac{e^x}{e^x-1}+e^x-6=0$$

נסמן: $e^x=\mathrm{t}$ ונקבל:

$$\frac{2\mathrm{t}}{\mathrm{t}-1}+\mathrm{t}-6=0 \quad /\cdot(\mathrm{t}-1)$$

$$2\mathrm{t}+\mathrm{t}^2-7\mathrm{t}+6=0$$

$$\mathrm{t}^2-5\mathrm{t}+6=0 \;\Rightarrow\; \mathrm{t}_{1,2}=\frac{5\pm1}{2}$$

$$\mathrm{t}_1=3 \;\Rightarrow\; e^x=3 \;\Rightarrow\; x=\ln 3$$

$$\mathrm{t}_2=2 \;\Rightarrow\; e^x=2 \;\Rightarrow\; x=\ln 2$$

$$x_1=\ln 3 \;\Rightarrow\; y_1=2\ln(3-1)+3-6\ln 3=2\ln 2+3-6\ln 3$$

$$x_2=\ln 2 \;\Rightarrow\; y_2=2\ln(2-1)+2-6\ln 2=2-6\ln 2$$

x	$0<x<\ln 2$	$x=\ln 2$	$\ln 2<x<\ln 3$	$x=\ln 3$	$x>\ln 3$
y'	+	0	−	0	+
y	↗	max	↘	min	↗

$$f'(\ln 1.5)=\frac{2\cdot1.5}{1.5-1}+1.5-6=1.5>0$$

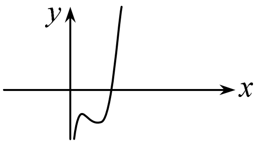
$$f'(\ln 2.5)=\frac{2\cdot2.5}{2.5-1}+2.5-6\approx-0.17<0$$

$$f'(\ln 4)=\frac{2\cdot4}{4-1}+4-6\approx0.67>0$$

תשובה: $\max(\ln 2, 2-6\ln 2)$, $\min(\ln 3, 3+2\ln 2-6\ln 3)$.

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(ג) ניתן להיעזר בסעיפים קודמים ולסרטט סקיצה של גרף הפונקציה.



$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, בתחום הגדרתה $(x>0)$

הפונקציה רציפה ויש לה 2 נקודות קיצון.

כלומר, הפונקציה שלילית לכל $0 < x < \ln 3$.

בתחום $x > \ln 3$ הפונקציה עולה ומתקיים: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$,

ולכן גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודה אחת בלבד.

(ד)
$$f''(x) = \left(\frac{2e^x}{e^x-1} + e^x - 6\right)' = \left(2 + \frac{2}{e^x-1} + e^x - 6\right)'$$

$$f''(x) = -\frac{2e^x}{(e^x-1)^2} + e^x$$

$$f''(x) = 0 \;\Rightarrow\; -\frac{2e^x}{(e^x-1)^2} + e^x = 0 \;\Rightarrow\; (e^x-1)^2 = 2$$

$$e^x - 1 = -\sqrt{2} \;\Rightarrow\; e^x = 1-\sqrt{2} < 0$$

וזה לא ייתכן, כי $e^x > 0$ לכל x .

$$e^x - 1 = \sqrt{2} \;\Rightarrow\; e^x = 1+\sqrt{2} \;\Rightarrow\; x = \ln(1+\sqrt{2}) \approx 0.88$$

$$f''(0.1) = -\frac{2e^{0.1}}{(e^{0.1}-1)^2} + e^{0.1} < 0$$

$$f''(1) = -\frac{2e}{(e-1)^2} + e > 0$$

כלומר הפונקציה משנה קעירות סביב $x = \ln(1+\sqrt{2})$.

תשובה: $x_{\text{פיתול}} = \ln(\sqrt{2}+1)$.