פתרון מבחן מס' 8 (ספר לימוד – שאלון 035807)

(1) מכיוון שמשוואת המשיק לפרבולה $y^2=2\mathrm{p}x$ בנקודה (x_1,y_1) שעל

הפרבולה היא: $yy_1=\mathrm{p}(x+x_0)$, הרי ששיפוע המשיק הוא $\frac{\mathrm{p}}{y_1}$,

ומכיוון שמכפלת שיפועי ישרים מאונכים שווה ל- -1 ,

הרי ששיפוע הנורמל (שיפוע הישר ℓ) הוא $-\frac{y_1}{\mathrm{p}}$.

משוואת ישר ℓ העובר דרך הנקודה $A(x_1,y_1)$ ובעל שיפוע $\mathrm{m}_{\text{נורמל}}=-\frac{y_1}{\mathrm{p}}$:

$$y-y_1=-\frac{y_1}{\mathrm{p}}(x-x_1)\quad /\cdot\mathrm{p}$$

$$y\mathrm{p}-y_1\mathrm{p}=-y_1x+x_1y_1$$

כלומר משוואת הישר ℓ :

$$y_1x+y\mathrm{p}-y_1\mathrm{p}-x_1y_1=0$$

מרחק הנקודה $B(x_1,-y_1)$ מהישר ℓ :

$$\mathrm{d}_1=\frac{|y_1x_1+(-y_1)\mathrm{p}-y_1\mathrm{p}-x_1y_1|}{\sqrt{y_1^2+\mathrm{p}^2}}=\frac{2|y_1|\mathrm{p}}{\sqrt{y_1^2+\mathrm{p}^2}}$$

מכיוון ששיפועי ישרים מקבילים שווים זה לזה, הרי שגם שיפוע הישר d

הוא $-\frac{y_1}{\mathrm{p}}$.

משוואת ישר d העובר דרך קדקוד הפרבולה $(0,0)$ ובעל שיפוע $-\frac{y_1}{\mathrm{p}}$:

$$y-0=-\frac{y_1}{\mathrm{p}}(x-0)\quad /\cdot\mathrm{p}$$

$$y\mathrm{p}=-y_1x$$

כלומר משוואת ישר d :

$$y_1x+y\mathrm{p}=0$$

מרחק המוקד $F\left(\frac{\mathrm{p}}{2},0\right)$ של הפרבולה מהישר d :

$$\mathrm{d}_2=\frac{\left|y_1\cdot\frac{\mathrm{p}}{2}+0\cdot\mathrm{p}\right|}{\sqrt{y_1^2+\mathrm{p}^2}}=\frac{\frac{1}{2}|y_1|\mathrm{p}}{\sqrt{y_1^2+\mathrm{p}^2}}$$

ומכיוון ש- $\mathrm{d}_1=\frac{2|y_1|\mathrm{p}}{\sqrt{y_1^2+\mathrm{p}^2}}$, הרי ש- $\mathrm{d}_1=4\cdot\mathrm{d}_2$, כלומר מרחק הנקודה B

מהישר ℓ גדול פי 4 ממרחק המוקד F מהישר d .

(2) (א) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$

כלומר: $\underline{v} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BB'}$

$\overrightarrow{CD'} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DD'}$

כלומר: $\underline{u} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB'}$

ומכיוון ש- $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ נקבל: $\underline{u} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'}$.

(ב) קיבלנו מערכת משוואות:

$$+\begin{cases} \underline{v} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BB'} \\ \underline{u} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} \end{cases}$$

$$\underline{u} + \underline{v} = 1\tfrac{3}{4}\overrightarrow{BB'} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{BB'} = \tfrac{4}{7}\underline{u} + \tfrac{4}{7}\underline{v}$$

ואז: $\underline{u} = -\overrightarrow{AB} + \frac{4}{7}\underline{u} + \frac{4}{7}\underline{v} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} = -\frac{3}{7}\underline{u} + \frac{4}{7}\underline{v}$

(ג) מכיוון ש- $\overrightarrow{BB'} \perp \overrightarrow{AB}$, הרי ש- $\overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

ניעזר בסעיף (ב) ונקבל: $\left(\frac{4}{7}\underline{u} + \frac{4}{7}\underline{v}\right)\cdot\left(-\frac{3}{7}\underline{u} + \frac{4}{7}\underline{v}\right) = 0$

$$-\tfrac{12}{49}|\underline{u}|^2 + \tfrac{16}{49}\underline{u}\cdot\underline{v} - \tfrac{12}{49}\underline{u}\cdot\underline{v} + \tfrac{16}{49}|\underline{v}|^2 = 0$$

$$\tfrac{4}{49}\underline{u}\cdot\underline{v} = \tfrac{12}{49}|\underline{u}|^2 - \tfrac{16}{49}|\underline{v}|^2 \quad /\cdot\tfrac{49}{4}$$

$$\underline{u}\cdot\underline{v} = 3|\underline{u}|^2 - 4|\underline{v}|^2$$

(3) הפתרון לשאלה זו יעלה בימים הקרובים.

(4) (א) תחום הגדרה: $x^2+x-\mathrm{a}>0$. המקדם הראשי חיובי ($\mathrm{a}=1$),
לכן כדי שהפונקציה תהיה מוגדרת לכל x , נדרוש שאי-שוויון זה יתקיים
לכל x , כלומר $\Delta<0$. נקבל: $1+4\mathrm{a}<0 \;\Rightarrow\; \mathrm{a}<-\frac{1}{4}$

(ב) $$f'(x)=\frac{2x+1}{x^2+x-\mathrm{a}}$$

$$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; \frac{2x+1}{x^2+x-\mathrm{a}}=0 \;\Rightarrow\; 2x+1=0 \;\Rightarrow\; x=-\frac{1}{2}$$

$$f\left(-\tfrac{1}{2}\right)=\ln\left(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2}-\mathrm{a}\right)=\ln\left(-\tfrac{1}{4}-\mathrm{a}\right)$$

אם נקודה זו נמצאת על ציר ה- x , אז $y=0$, כלומר:

$$\ln\left(-\tfrac{1}{4}-\mathrm{a}\right)=0 \;\Rightarrow\; -\tfrac{1}{4}-\mathrm{a}=1 \;\Rightarrow\; \mathrm{a}=-\tfrac{5}{4}$$

קיבלנו: $f(x)=\ln(x^2+x+\frac{5}{4})$, תחום ההגדרה: כל x .

(ג) $$f''(x)=\left(\frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{4}}\right)'=\frac{2\cdot\left(x^2+x+\frac{5}{4}\right)-(2x+1)\cdot(2x+1)}{\left(x^2+x+\frac{5}{4}\right)^2}=$$

$$=\frac{2x^2+2x+\frac{5}{2}-4x^2-4x-1}{\left(x^2+x+\frac{5}{4}\right)^2}=\frac{-2x^2-2x+\frac{3}{2}}{\left(x^2+x+\frac{5}{4}\right)^2}=\frac{-4x^2-4x+3}{2\cdot\left(x^2+x+\frac{5}{4}\right)^2}$$

$$f''(x)=0 \;\Rightarrow\; \frac{-4x^2-4x+3}{2\cdot\left(x^2+x+\frac{5}{4}\right)^2}=0 \;\Rightarrow\; 4x^2+4x-3=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-4\pm 8}{8} \;\Rightarrow\; x_1=\frac{1}{2}\;,\; x_2=-\frac{3}{2}$$

x	$x<-\frac{3}{2}$	$x=-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}<x<\frac{1}{2}$	$x=\frac{1}{2}$	$x>\frac{1}{2}$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\cap$		$\cup$		$\cap$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

$$f''(-2)=\frac{-4\cdot 4-4\cdot(-2)+3}{+}<0$$

$$f''(0)=\frac{0-0+3}{+}>0 \quad , \quad f''(1)=\frac{-4-4+3}{+}<0$$

הפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מטה $\cap$ בתחום: $x>\frac{1}{2}$, $x<-\frac{3}{2}$,

וקעורה כלפי מעלה $\cup$ בתחום: $-\frac{3}{2}<x<\frac{1}{2}$.

ד) (i) $f'(x)$ עולה $\Leftarrow$ $f''(x)>0$ $\Leftarrow$

$\Leftarrow$ לפי סעיף (ג): $-\frac{3}{2}<x<\frac{1}{2}$.

$f'(x)$ יורדת $\Leftarrow$ $f''(x)<0$ $\Leftarrow$

$\Leftarrow$ לפי סעיף (ג): $x>\frac{1}{2}$, $x<-\frac{3}{2}$.

(ii) $x_{\max}=\frac{1}{2}$ ($f'(x)$ עוברת מעלייה לירידה),

$x_{\min}=-\frac{3}{2}$ ($f'(x)$ עוברת מירידה לעלייה).

(5) (א) **דרך ראשונה:** נסמן: $a = e^{x^2-9}$, $a > 0$ לכל x . אז:

$$e^{9-x^2} = e^{-(x^2-9)} = a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$f(x) = a + \frac{1}{a} = \frac{a^2+1}{a} = \frac{a^2-2a+1+2a}{a} = \frac{(a-1)^2}{a} + 2$$

$$\frac{(a-1)^2}{a} \ge 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \ge 2$$

דרך שנייה: $f'(x) = e^{x^2-9} \cdot 2x + e^{9-x^2} \cdot (-2x) = 2x\left(e^{x^2-9} - e^{9-x^2}\right)$

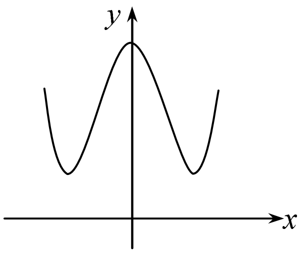
$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x\left(e^{x^2-9} - e^{9-x^2}\right) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(0, e^{-9} + e^{9}\right)$$

$$e^{x^2-9} - e^{9-x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 9 = 9 - x^2 \quad \Rightarrow \quad x_{2,3} = \pm 3$$

$$x_2 = 3 \quad \Rightarrow \quad (3, e^0 + e^0) = (3,2)$$

$$x_3 = -3 \quad \Rightarrow \quad (-3, e^0 + e^0) = (-3,2)$$



$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$, לכן גרף הפונקציה:

כלומר הערך המינימלי של $f(x)$ הוא 2

ואז $f(x) \ge 2$ לכל x.

(ב) $\left(e^{\sin^2 x}\right)' = e^{\sin^2 x} \cdot (\sin^2 x)' = e^{\sin^2 x} \cdot 2\sin x \cos x =$

$$= e^{\sin^2 x} \sin 2x$$

לכן: $f(x) = \int f'(x)\,dx = \int \sin 2x \cdot e^{\sin^2 x}\,dx = e^{\sin^2 x} + C$

$$f(\pi) = -2 \quad \Rightarrow \quad e^{\sin^2 \pi} + C = -2 \quad \Rightarrow \quad e^0 + C = -2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 1 + C = -2 \quad \Rightarrow \quad C = -3$$

$$f(x) = e^{\sin^2 x} - 3$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\sin^2 \frac{\pi}{2}} - 3 = e^{1^2} - 3 = e - 3$$