פתרון מבחן מס' 6 (ספר לימוד – שאלון 035807)

(1) $F_{\text{פרבולה}} = F_{\text{אליפסה}} \;\Rightarrow\; c = \frac{1}{2}p \;\Rightarrow\; \frac{p}{2} = \sqrt{a^2 - b^2}$

(א) הישר הנתון משיק לפרבולה, לכן נקבל את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} y = \frac{x}{4} + 6 \\ y^2 = 2px \end{cases} \;\Rightarrow\; \left(\frac{x}{4} + 6\right)^2 = 2px$$

$$\frac{x^2}{16} + 3x + 36 = 2px \quad / \cdot 16 \;\Rightarrow\; x^2 + x(48 - 32p) + 576 = 0$$

מכיוון שלישר ולפרבולה יש נקודה משותפת אחת, למערכת המשוואות
יש פתרון יחיד, כלומר $\Delta = 0$. מכאן:

$$\Delta = 0 \;\Rightarrow\; (48 - 32p)^2 - 4 \cdot 576 = 0 \;\; / : 4$$

$$(24 - 16p)^2 - 576 = 0 \;\Rightarrow\; 24 - 16p = \pm 24$$

$24 - 16p = 24 \;\Rightarrow\; p = 0$ אין משמעות לתוצאה כזו

$$24 - 16p = -24 \;\Rightarrow\; 16p = 48 \;\Rightarrow\; p = 3$$

מכאן, משוואת הפרבולה: $y^2 = 6x$.

הישר הנתון משיק לאליפסה, כלומר למערכת המשוואות הבאה
יש פתרון יחיד:

$$\begin{cases} y = \frac{x}{4} + 6 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

כמו כן, נתון: $\sqrt{a^2 - b^2} = \frac{3}{2}$.

$$a^2 - b^2 = \frac{9}{4} \;\Rightarrow\; a^2 = b^2 + \frac{9}{4}$$

$$\frac{x^2}{b^2 + \frac{9}{4}} + \frac{\left(\frac{x}{4} + 6\right)^2}{b^2} = 1 \quad / \cdot b^2\left(b^2 + \frac{9}{4}\right)$$

$$x^2 b^2 + \left(b^2 + \frac{9}{4}\right)\left(\frac{x}{4} + 6\right)^2 = b^2\left(b^2 + \frac{9}{4}\right)$$

$$x^2 b^2 + \left(b^2 + \frac{9}{4}\right) \cdot \frac{x^2}{16} + \left(b^2 + \frac{9}{4}\right) \cdot 3x + \left(b^2 + \frac{9}{4}\right) \cdot 36 = b^2\left(b^2 + \frac{9}{4}\right)$$

המשך בעמוד הבא >>>

$$x^2\left(b^2+\frac{b^2+\frac{9}{4}}{16}\right)+3\cdot\left(b^2+\tfrac{9}{4}\right)x+\left(b^2+\tfrac{9}{4}\right)\cdot\left(36-b^2\right)=0$$

$$\Delta=0 \;\Rightarrow\; 9\cdot\left(b^2+\tfrac{9}{4}\right)^2-4\cdot\left(b^2+\frac{b^2+\frac{9}{4}}{16}\right)\cdot\left(b^2+\tfrac{9}{4}\right)\cdot\left(36-b^2\right)=0$$

$$\left(b^2+\tfrac{9}{4}\right)\cdot\left[9b^2+\tfrac{81}{4}-4\cdot\frac{17b^2+\frac{9}{4}}{16}\cdot(36-b^2)\right]=0$$

$b^2+\frac{9}{4}>0$ לכל ערך של b.

$$36b^2+81-\left(17b^2+\tfrac{9}{4}\right)\left(36-b^2\right)=0$$

נסמן: $b^2=k$ ונקבל: $36k+81-612k+17k^2-81+\frac{9}{4}k=0$

$$17k^2-573.75k=0 \;\Rightarrow\; 17k(k-33.75)=0$$

$k=0 \;\Rightarrow\; b^2=0$ אין משמעות לפתרון זה

$$k=33.75 \;\Rightarrow\; b^2=33.75 \;\Rightarrow\; a^2=33.75+2.25=36$$

משוואת האליפסה: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{33.75}=1$.

(ב) שיעורי נקודת ההשקה של הישר והפרבולה:

$$x^2+(48-96)x+576=0$$

$$x^2-48x+576=0 \;\Rightarrow\; (x-24)^2=0 \;\Rightarrow\; x=24$$

$$y=\tfrac{24}{4}+6=12 \;\Rightarrow\; (24,12)$$

שיעורי נקודת ההשקה של הישר והאליפסה:

$$33.75x^2+36\cdot\left(\tfrac{x}{4}+6\right)^2=33.75\cdot 36$$

$$33.75x^2+2.25x^2+108x+1,296=1,215$$

$$36x^2+108x+81=0 \;\Rightarrow\; 4x^2+12x+9=0$$

$$(2x+3)^2=0 \;\Rightarrow\; x=-1.5 \;\Rightarrow\; y=\tfrac{-1.5}{4}+6=5.625$$

כלומר: $(-1.5,5.625)$.

(2) (א) $DC \parallel AB$ וגם $AB = DC$, לכן: $C - D = B - A$

$$D = A + C - B$$

$$D = (-1,2,-4) + (5,-4,1) - (-3,-3,-2) = (7,1,-1)$$

$$Q = \frac{C+S}{2} = \frac{(5,-4,1)+(9,-2,5)}{2} = \frac{(14,-6,6)}{2} = (7,-3,3)$$

$$\overrightarrow{QB} = B - Q = (-10,0,-5) = -5 \cdot (2,0,1)$$

$$\overrightarrow{QD} = D - Q = (0,4,-4) = 4 \cdot (0,1,-1)$$

נמצא וקטור נורמל למישור BDQ .

נסמן את משוואת המישור BDQ על-ידי: $A_1x + B_1y + C_1z + D = 0$

ואז מתקיים:

$$(A_1,B_1,C_1) \cdot \overrightarrow{QB} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2A_1 + C_1 = 0$$

$$(A_1,B_1,C_1) \cdot \overrightarrow{QD} = 0 \quad \Rightarrow \quad B_1 - C_1 = 0$$

נסמן: $A_1 = -r$ ונקבל: $C_1 = 2r$, $B_1 = 2r$.

מכאן, משוואת המישור BDQ : $-x + 2y + 2z + D = 0$

נקודה B נמצאת במישור זה, לכן שיעוריה מקיימים את המשוואה:

$$3 + 2\cdot(-3) + 2\cdot(-2) + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 7$$

משוואת המישור BDQ : $-x + 2y + 2z + 7 = 0$

(ב) $\underline{h} = (-1,2,2)$, $\overrightarrow{DS} = (2,-3,6)$

$$\sin\alpha = \frac{|(-1,2,2)\cdot(2,-3,6)|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+3^2+6^2}} = \frac{4}{3\cdot 7} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 10.98°$$

(3) (א)

$$z_1 - z_2 = 1 \;\Rightarrow\; z_1 = 1 + z_2$$

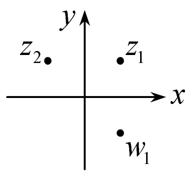
$$z_1 \cdot z_2 = -1 \;\Rightarrow\; {z_2}^2 + z_2 = -1$$

$${z_2}^2 + z_2 + 1 = 0 \;\Rightarrow\; (z_2)_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

נתון כי z_2 נמצא מעל ציר ה- x במישור גאוס, לכן: $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$z_1 = z_2 + 1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

(ב) (i) אורך צלע הריבוע שווה למרחק בין



z_1 ו- z_2 . כיוון ש- $\mathrm{Im}_1 = \mathrm{Im}_2$, נקבל:

$$|\,z_1 z_2\,| = \mathrm{Re}_1 - \mathrm{Re}_2 = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$$

(ii) $\mathrm{Re}_{w_1} = \mathrm{Re}_{z_1} \;\Leftarrow\;$ ציר ה- $y \parallel z_1 w_1 \;\Leftarrow\;$ ציר ה- $x \parallel z_1 z_2$

$$\mathrm{a} = 1 = \mathrm{Im}_{z_1} - \mathrm{Im}_{w_1} \;\Rightarrow\; \mathrm{Im}_{w_1} = -1 + \mathrm{Im}_{z_1} = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$$

$$w_1 = \frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)i$$

נהפוך את w_1 לצורה טריגונומטרית:

$$\mathrm{r} = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$$\tan\theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} - 2 \;\Rightarrow\; \theta_1 = -15^\circ \;,\; \theta_2 = 165^\circ$$

נתון ש- w_1 נמצא ברביע הרביעי, לכן: $\theta_1 = -15^\circ$.

$$w_1 = \sqrt{2 - \sqrt{3}}\,\mathrm{cis}(-15^\circ)$$

$${w_1}^{12} = (2 - \sqrt{3})^6\,\mathrm{cis}(-180^\circ) = -(2 - \sqrt{3})^6$$

נתון כי $w_1^{12} = \frac{\mathrm{a}}{1{,}000}$, לכן: $\frac{\mathrm{a}}{1{,}000} = -(2 - \sqrt{3})^6$

מכאן: $\mathrm{a} = -1000 \cdot (2 - \sqrt{3})^6 \approx -0.37$

(4) (א) תחום הגדרה: $3x>0 \Rightarrow x>0$

(ב) (i) $f'(x)=0 \Rightarrow \frac{1}{x}-4\mathrm{m}x=0 \Rightarrow x^2=\frac{1}{4\mathrm{m}}$

$x=\pm\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{m}}}\ ,\ x>0 \Rightarrow x=\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{m}}}$

עבור $\mathrm{m}>0$:

x	$0<x<\frac{1}{2\sqrt{m}}$	$x=\frac{1}{2\sqrt{m}}$	$x>\frac{1}{2\sqrt{m}}$
f′(x)	+	0	−
f(x)	↗	max	↘

$f'(0^+)=\frac{1}{0^+}-0^+=+\infty>0$

$f'(+\infty)=\frac{1}{+\infty}-\infty=-\infty<0$

כלומר: $x_{\max}=\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{m}}}$.

(ii) לפונקציה אין נקודות קיצון אם $\mathrm{m}\le 0$.

(ג) (i) $\mathrm{m}=-\frac{1}{4}<0$, לכן אין לפונקציה נקודות קיצון.

לכל $x>0$: $f'(x)=\frac{1}{x}+x=\frac{1+x^2}{x}>0$

כלומר הפונקציה עולה לכל $x>0$, כלומר בכל תחום הגדרתה.

(ii) $f''(x)=\left(\frac{1}{x}+x\right)'=-\frac{1}{x^2}+1$

$f''(x)=0 \Rightarrow -\frac{1}{x^2}+1=0 \Rightarrow x^2=1$

$x=\pm1\ ,\ x>0 \Rightarrow x=1$

$y=\ln3+\frac{1}{2} \Rightarrow (1,\ln3+\frac{1}{2})$

הנקודה $(1,\ln3+\frac{1}{2})$ היא נקודת פיתול, כי סביב $x=1$
הנגזרת השנייה של הפונקציה, $f''(1)$, משנה את סימנה.

המשך בעמוד הבא ➤➤➤

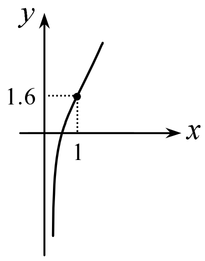
$$\lim_{x \to 0^+}\left(\ln 3x + \frac{x^2}{2}\right) = -\infty + 0 = -\infty$$ (*iii*)

מכאן, $x = 0$ היא אסימפטוטה אנכית.

$$\lim_{x \to \infty}\left(\ln 3x + \frac{x^2}{2}\right) = +\infty$$

$$f''\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1 - 4 < 0 \qquad f''(2) = 1 - \tfrac{1}{4} > 0$$

ראו סרטוט משמאל.



(5) (א) פתרון לסעיף זה יעלה בימים הקרובים.

(ב) $x \ge 1$, $y = \sqrt{\ln x^2}$.

נסמן את שיעור ה- x של הנקודה המבוקשת, A , ב- t ,

ואז $y_A = \sqrt{\ln t^2}$ ($t \ge 1$), ופונקציית המטרה היא:

$$M(t) = \sqrt{(x_A - 2.5)^2 + (y_A - 0)^2} = \sqrt{(t-2.5)^2 + \ln(t^2)}$$
$$= \sqrt{(t-2.5)^2 + 2\ln t}$$

$$M'(t) = \frac{2\,(t-2.5) + \frac{2}{t}}{+}$$

$$M'(t) = 0 \;\Rightarrow\; 2t - 5 + \frac{2}{t} = 0$$

$$2t^2 - 5t + 2 = 0 \;\Rightarrow\; t_1 = 2\ ,\ t_2 = \frac{1}{2}$$

הפתרון $t_2 = \frac{1}{2}$ נפסל, כי $t \ge 1$.

$$x_A = 2 \;\Rightarrow\; y_A = \sqrt{\ln 2^2} = \sqrt{\ln 4}$$

המשך בעמוד הבא ➤➤➤

מכנה הנגזרת חיובי, לכן ניתן לקבוע את סוג הקיצון לפי נגזרת המונה בלבד.

$$G(t) = 2t - 5 + \frac{2}{t}$$

$$G'(t) = 2 - \frac{2}{t^2}$$

$$G'(2) = 2 - \frac{2}{4} > 0 \quad \Rightarrow \quad \min$$

תשובה: בתחום $x \geq 1$, הנקודה $(2, \sqrt{\ln 4})$

היא הנקודה הקרובה ביותר לנקודה $(2.5, 0)$.