פתרון מבחן מס' 5 (ספר לימוד – שאלון 035807)

(1) $OB = 3 \cdot AB \;\Rightarrow\; AB = \frac{1}{4} \cdot OA = \frac{1}{4} \cdot R$

(א) נסמן: $x_C = t \;,\; y_C = p$.

נסמן ב- D את נקודת החיתוך של הישר AC עם ציר ה- x .

BC מקביל לציר ה- x , לכן לפי משפט תאלס: $\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AO} = \frac{1}{4}$

ומכאן: $x_A = x_C = t$

$$\frac{y_A - y_C}{y_A} = \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; 4y_A - 4y_C = y_A$$

$$y_A = \frac{4}{3} y_C = \frac{4}{3}p$$

הנקודה $A(t, \frac{4}{3}p)$ נמצאת על המעגל הנתון, לכן: $t^2 + (\frac{4}{3}p)^2 = R^2$

משוואת המקום הגיאומטרי: $x^2 + \frac{16}{9} y^2 = R^2 \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{\frac{9}{16}R^2} = 1$

$(x \neq 0 \,,\, \pm R)$

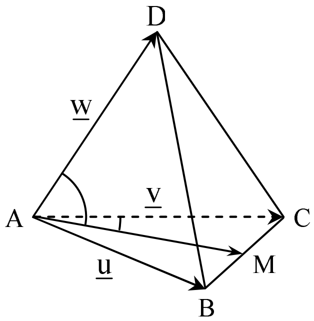
(ב) $B(3,6) \;\Rightarrow\; A(\frac{4}{3} \cdot 3, \frac{4}{3} \cdot 6) \;\Rightarrow\; A(4,8) \;\Rightarrow\; C(4,6)$

$$\frac{4^2}{R^2} + \frac{6^2}{\frac{9}{16}R^2} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{16}{R^2} + \frac{576}{9R^2} = 1 \;\Rightarrow\; R^2 = 80$$

שיעורי נקודות החיתוך של המקום הגיאומטרי עם ציר ה- y :

$$x = 0 \;\Rightarrow\; \frac{y^2}{\frac{9}{16} \cdot 80} = 1 \;\Rightarrow\; y^2 = 45 \;\Rightarrow\; y = \pm\sqrt{45} = \pm 3\sqrt{5}$$

כלומר: $(0, \pm 3\sqrt{5})$.



(2) נתון: $\overrightarrow{BM} = t \cdot \overrightarrow{BC} = t \cdot (\underline{v} - \underline{u})$.

נסמן: $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = a$.

(א) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \underline{u} + t \cdot (\underline{v} - \underline{u}) =$

$= (1-t) \cdot \underline{u} + t \cdot \underline{v}$

(ב)
$$\cos \measuredangle MAD = \cos \measuredangle MAC$$

$$\frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD}}{\cancel{|\overrightarrow{AM}|} \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC}}{\cancel{|\overrightarrow{AM}|} \cdot |\overrightarrow{AC}|} \quad (*)$$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} = [(1-t) \cdot \underline{u} + t \cdot \underline{v}] \cdot \underline{w} =$$
$$= (1-t) \cdot |\underline{u}| \cdot |\underline{w}| \cdot \cos \measuredangle DAB + t \cdot |\underline{v}| \cdot |\underline{w}| \cdot \cos \measuredangle DAC =$$
$$= (1-t) \cdot a \cdot |\underline{w}| \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right) + t \cdot a \cdot |\underline{w}| \cdot 0.4 =$$
$$= a \cdot |\underline{w}| \cdot \left(\tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{5}t\right) = a \cdot |\underline{w}| \cdot \left(0.9t - 0.5\right) \quad ①$$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = [(1-t) \cdot \underline{u} + t \cdot \underline{v}] \cdot \underline{v} =$$
$$= (1-t) \cdot |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos 60^\circ + t \cdot |\underline{v}|^2 =$$
$$= (1-t) \cdot a \cdot a \cdot \tfrac{1}{2} + t \cdot a^2 = a^2 \cdot \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}t + t\right) = a^2 \cdot \left(\tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{2}\right) \quad ②$$

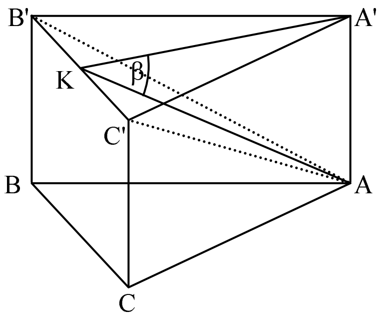
$$|\overrightarrow{AD}| = |\underline{w}| \quad ③$$

$$|\overrightarrow{AC}| = |\underline{v}| = a \quad ④$$

נציב את ④ , ③ , ② , ① ב- $(*)$ ונקבל:

$$\frac{a \cdot |\underline{w}| \cdot (0.9t - 0.5)}{|\underline{w}|} = \frac{a^2 \cdot (0.5t + 0.5)}{a}$$

$$0.9t - 0.5 = 0.5t + 0.5 \quad \Rightarrow \quad 0.4t = 1 \quad \Rightarrow \quad t = 2.5$$



(3) (א) נסמן את אמצע הקטע $B'C'$ ב- K.

$A'K \perp B'C'$ (תיכון לבסיס במשולש שווה-שוקיים הוא גם גובה לבסיס).

$\measuredangle AA'B' = \measuredangle AA'C' = 90°$,

$A'B' = A'C'$, AA' צלע משותפת

למשולשים $\Delta AA'C'$, $\Delta AA'B'$, לכן:

$\Delta AA'C' \cong \Delta AA'B'$ לפי משפט חפיפה צ.ז.צ.

מכאן נקבל ש- $\Delta AB'C'$ הוא משולש שווה-שוקיים, ולכן $AK \perp B'C'$

(במשולש שווה-שוקיים, תיכון לבסיס הוא גם גובה לבסיס).

כלומר: $\measuredangle AKA' = \beta$.

$$KC' = \frac{1}{2}B'C' = \frac{1}{2}a$$

$$\measuredangle KA'C' = \frac{1}{2}\measuredangle B'A'C' = \frac{1}{2}\alpha$$

(תיכון לבסיס במשולש שווה-שוקיים הוא גם חוצה-זווית הראש),

מכאן ב- $\Delta A'KC'$:
$$KA' = \frac{a}{2\,tg\frac{\alpha}{2}}$$

ב- $\Delta AA'K$:
$$AA' = KA' \cdot tg\beta = \frac{a\,tg\beta}{2\,tg\frac{\alpha}{2}}$$

$$V = S_{\Delta A'B'C'} \cdot AA' = \frac{B'C' \cdot A'K}{2} \cdot AA' = \frac{a \cdot a}{2 \cdot 2\,tg\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{a \cdot tg\beta}{2\,tg\frac{\alpha}{2}} = \frac{a^3\,tg\beta}{8\,tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

(ב)
$$V_{ABCC'B} = \frac{1}{3}S_{BB'C'C} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot BB' \cdot B'C' \cdot A'K =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot AA' \cdot B'C' \cdot A'K = \frac{2}{3} \cdot V =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{a^3\,tg\beta}{8\,tg^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{a^3\,tg\beta}{12\,tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

(4) (א) פתרון לסעיף זה יעלה בימים הקרובים.

(ב) חומר א':

$M_0^{א} =$ 8 ק"ג

$T_{0.5}^{א} =$ 3 חודשים $\Rightarrow \frac{M_0}{2} = M_0 \cdot a_1^3 \Rightarrow a_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

חומר ב':

$M_0^{ב} =$ 6 ק"ג

$T_{0.5}^{ב} =$ 6 חודשים $\Rightarrow \frac{M_0}{2} = M_0 \cdot a_2^6 \Rightarrow a_2 = \sqrt[6]{\frac{1}{2}}$

$$M_0^{א} \cdot a_1^t + M_0^{ב} \cdot a_2^t = 10$$

$$8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}} + 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} = 10$$

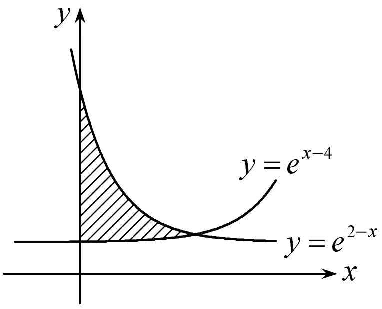
נסמן: $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} = z$, מכאן: $4z^2 + 3z = 5 \Rightarrow 4z^2 + 3z - 5 = 0$

$$z_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{89}}{8} \Rightarrow z_1 = 0.8042476 \ , \ z_2 = -1.55$$

הפתרון $z_2 = -1.55$ נפסל, כי $z > 0$. מכאן:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} = 0.8042476 \Rightarrow \frac{t}{6} = \frac{\ln 0.8042476}{\ln 0.5} \approx 0.3143$$

$t = 0.3143 \cdot 6 =$ 1.886 חודשים



(5) (א) הפונקציה $y=e^{x-4}$ עולה,

$y(0)=e^{-4}=\frac{1}{e^4}$.

הפונקציה $y=e^{2-x}$ יורדת,

$y(0)=e^2$.

נמצא את שיעור ה- x

של נקודת החיתוך של שני הגרפים :

$$e^{x-4}=e^{2-x} \Rightarrow x-4=2-x \Rightarrow x=3$$

$$S=\int_0^3 (e^{2-x}-e^{x-4})\,dx=\left(-e^{2-x}-e^{x-4}\right)\Big|_0^3=$$

$$=-e^{-1}-e^{-1}-(-e^2-e^{-4})=$$

$$=-\frac{2}{e}+e^2+\frac{1}{e^4}=\frac{e^6-2e^3+1}{e^4}$$ יחידות שטח

(ב) $f(x)=x\ln\frac{x}{5}\ ,\ 1\le x\le 5$

$$f(1)=1\cdot\ln\frac{1}{5}\approx -1.609$$

$$f(5)=5\cdot\ln 1=0$$

$$f'(x)=1\cdot\ln\frac{x}{5}+x\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\frac{x}{5}}=\ln\frac{x}{5}+1$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \ln\frac{x}{5}+1=0 \Rightarrow \ln\frac{x}{5}=-1$$

$$\frac{x}{5}=\frac{1}{e} \Rightarrow x=\frac{5}{e} \Rightarrow f\left(\frac{5}{e}\right)=\frac{5}{e}\cdot\ln e^{-1}=-\frac{5}{e}\approx -1.84$$

$$\min\{-1.609\ ,\ 0\ ,\ -1.84\}=-1.84$$

תשובה: המינימום המוחלט של הפונקציה הוא $-\frac{5}{e}$

והוא מתקבל בנקודה $\left(\frac{5}{e},-\frac{5}{e}\right)$.

גבי יקואל

משבצת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

◈ לכל הכיתות ◈ לכל השאלונים ◈ לכל הרמות