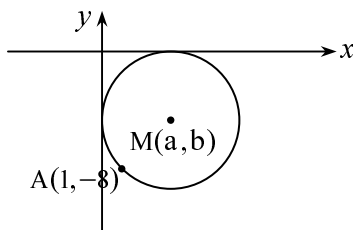


## פתרון מבחן מס' 4 (ספר לימוד – שאלון 035807)



(1) (א) משוואת המעגל היא :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

מרכז המעגל המשיק לצירים נמצא

ברביע IV, מכאן  $a > 0$ ,  $b < 0$ ,

כלומר:  $a = -b = R$ . נציב ונקבל:

$$(x - R)^2 + (y + R)^2 = R^2$$

$$(1 - R)^2 + (-8 + R)^2 = R^2 \quad \text{לכן: } A(1, -8) \text{ הנקודה עובר בנקודה}$$

$$1 - 2R + R^2 + 64 - 16R + R^2 = R^2 \Rightarrow R^2 - 18R + 65 = 0$$

$$R_{1,2} = \frac{18 \pm 8}{2} \Rightarrow R_1 = 13, R_2 = 5$$

$$R_1 = 13 \Rightarrow (x - 13)^2 + (y + 13)^2 = 169$$

$$R_2 = 5 \Rightarrow (x - 5)^2 + (y + 5)^2 = 25$$

(ב) משוואת המעגל:

$$(x - 5)^2 + (y + 5)^2 = 25$$

לפי הנתון:  $AB = BC = CD = DA = 5$ .

מכאן  $m_{BC} = m_{AM}$ , כלומר:  $BC \parallel AM$

$$\frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{-5 + 8}{5 - 1} = \frac{3}{4}$$

משוואת BC:

$$y = \frac{3}{4}x + n \Rightarrow -3x + 4y - 4n = 0$$

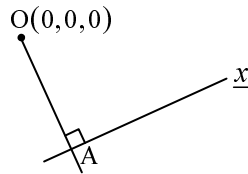
הנקודה  $A(1, -8)$  נמצאת מעל הישר BC במרחק 5 יחידות ממנו.

המקדם של y במשוואת הישר BC גדול מ-0, לכן:

$$5 = + \frac{-3 \cdot 1 + 4 \cdot (-8) - 4n}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

$$-3 - 32 - 4n = 25 \Rightarrow 4n = -60 \Rightarrow n = -15$$

משוואת הישר עליו מונחת הצלע BC היא:  $y = \frac{3}{4}x - 15$



(2) A היא נקודת החיתוך

של האנך עם הישר.

(א) נמצא את משוואת המישור

העובר דרך הנקודה O ומאונך לישר  $\underline{x}$  :

$$\underline{h} = \underline{t} = (1, 2, -1)$$

$$x + 2y - z + d = 0$$

$$0 + 2 \cdot 0 - 0 + d = 0 \Rightarrow d = 0 \Rightarrow x + 2y - z = 0$$

הנקודה A היא נקודת החיתוך של המישור שאת משוואתו מצאנו

והישר  $\underline{x}$ , לכן :

$$8 + t + 2(-1 + 2t) - (-t) = 0 \Rightarrow 6t + 6 = 0 \Rightarrow t = -1$$

$$A : (8, -1, 0) - 1 \cdot (1, 2, -1) = (7, -3, 1)$$

$$\underline{h}_\pi = \overrightarrow{OA} = (7, -3, 1) - (0, 0, 0) = (7, -3, 1) \quad (ב)$$

$$\pi : 7x - 3y + z + d = 0$$

$$7 \cdot 7 - 3 \cdot (-3) + 1 + d = 0 \Rightarrow d = -59 \quad A \in \pi, \text{ לכן :}$$

$$\pi : 7x - 3y + z - 59 = 0$$

$$7 \cdot 5 - 3 \cdot (-5) + z - 59 = 0 \Rightarrow z = 9 \quad B(5, -5, z) \in \pi, \text{ לכן :}$$

$$O(0, 0, 0), B(5, -5, 9) \Rightarrow \overrightarrow{OB} = (5, -5, 9)$$

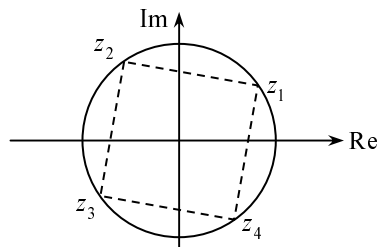
$$\overrightarrow{OB} \wedge \pi \Rightarrow \sin \alpha = \frac{|\overrightarrow{OB} \cdot \underline{h}_\pi|}{|\overrightarrow{OB}| \cdot |\underline{h}_\pi|} = \frac{(5, -5, 9) \cdot (7, -3, 1)}{\sqrt{25 + 25 + 81} \cdot \sqrt{49 + 9 + 1}}$$

$$\sin \alpha = \frac{35 + 15 + 9}{\sqrt{131} \cdot \sqrt{59}} = \frac{59}{\sqrt{131} \cdot \sqrt{59}} = \frac{\sqrt{59}}{\sqrt{131}} \Rightarrow \alpha \approx 42.15^\circ$$

$$z_1 = \sqrt{3} + i = r \operatorname{cis} \theta_1$$

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

$$\tan \theta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta_1 = 30^\circ, 210^\circ$$



(3) (א)

$z_1 = 2 \operatorname{cis} 30^\circ$  ו-  $\theta_1 = 30^\circ$  : לכן, I- נמצא ברביע ה-

: לכן,  $\theta_2 - \theta_1 = \theta_3 - \theta_2 = \theta_4 - \theta_3 = \theta_1 - \theta_4 = 90^\circ$

$$z_2 = 2 \operatorname{cis}(30^\circ + 90^\circ) = 2 \operatorname{cis} 120^\circ =$$

$$= 2(\cos 120^\circ + i \cdot \sin 120^\circ) = -1 + \sqrt{3}i$$

$$z_3 = 2 \operatorname{cis}(120^\circ + 90^\circ) = 2 \operatorname{cis} 210^\circ =$$

$$= 2(\cos 210^\circ + i \cdot \sin 210^\circ) = -\sqrt{3} - i$$

$$z_4 = 2 \operatorname{cis}(210^\circ + 90^\circ) = 2 \operatorname{cis} 300^\circ =$$

$$= 2(\cos 300^\circ + i \cdot \sin 300^\circ) = 1 - \sqrt{3}i$$

$$P = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 = 2 \operatorname{cis} 30^\circ \cdot 2 \operatorname{cis} 120^\circ \cdot 2 \operatorname{cis} 210^\circ \cdot 2 \operatorname{cis} 300^\circ = \quad (\text{ב})$$

$$= 2^4 \operatorname{cis}(30^\circ + 120^\circ + 210^\circ + 300^\circ) = 16 \operatorname{cis} 660^\circ = 16 \operatorname{cis} 300^\circ$$

.  $z_4$  כלומר עובר דרך  $\arg P = 300^\circ$

.  $z_2$  כלומר עובר דרך  $\arg P' = 300^\circ - 180^\circ = 120^\circ$

כלומר, הישר עליו מונך OP עובר דרך שני קדקודים הריבוע.

$$a - e^x \neq 0 \Rightarrow e^x \neq a \Rightarrow x \neq \ln a \quad (i) \quad (א) \quad (4) \quad \text{תחום הגדרה:}$$

(ii) שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$ :

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{e^0}{a - e^0} = \frac{1}{a - 1} \Rightarrow \left(0, \frac{1}{a - 1}\right)$$

שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ :

$$y = 0 \Rightarrow \frac{e^x}{a - e^x} = 0 \Rightarrow e^x = 0$$

$e^x > 0$  לכל  $x$ , לכן אין פתרון למשוואה, כלומר גרף הפונקציה

אינו חותך את ציר ה- $x$ .

(iii) משוואות אסימפטוטות:

$$\lim_{x \rightarrow \ln a} \frac{e^x}{a - e^x} = \left(\frac{a}{a - a}\right) = \pm \infty \Rightarrow x = \ln a \quad \text{אסימפטוטה אנכית:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{a - e^x} = -1 \Rightarrow y = -1 \quad \text{אסימפטוטה אופקית ימנית:}$$

אסימפטוטה אופקית שמאלית:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{a - e^x} = \left(\frac{0}{a - 0}\right) = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$f'(x) = \frac{e^x(a - e^x) + e^x \cdot e^x}{(a - e^x)^2} = \frac{e^x(a - e^x + e^x)}{(a - e^x)^2} = \frac{ae^x}{(a - e^x)^2} \quad (ב)$$

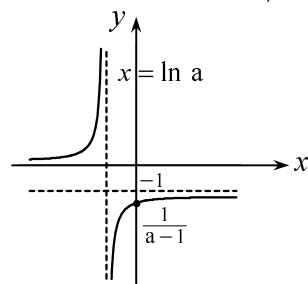
$a > 0$  לפי הנתון,  $e^x > 0$  לכל  $x$ ,  $(a - e^x)^2 > 0$  לכל  $x$

חוץ מאשר  $x = \ln a$ , כלומר לכל  $x$  בתחום ההגדרה.

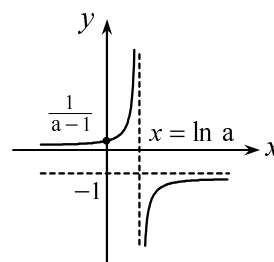
מכאן ש- $f'(x) > 0$  לכל  $x$  בתחום ההגדרה, כלומר הפונקציה עולה

בכל תחום הגדרתה.

(ii) סקיצה עבור:  $0 < a < 1$



(i) סקיצה עבור:  $a > 1$



$$\sqrt{x^2} = |x| \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} > |x| \quad (5) \quad (א)$$

$$x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} + x > 0$$

$$x < 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} + x > |x| + x = -x + x = 0$$

כלומר הפונקציה  $u(x)$  חיובית לכל  $x$ .

$$x + \sqrt{x^2 + 1} > 0 \Rightarrow u(x) > 0 \quad (i) \quad (ב) \quad \text{תחום הגדרה:}$$

וזאת הוכחנו בסעיף (א).

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1} \cdot (x + \sqrt{x^2+1})} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad (ii)$$

$$\int_{-a}^a \frac{dx}{2\sqrt{x^2+1}} = \ln 5 \Rightarrow \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \Big|_{-a}^a = \ln 5 \quad (ג)$$

$$\ln(a + \sqrt{a^2+1}) - \ln(-a + \sqrt{a^2+1}) = 2 \ln 5$$

$$\ln \frac{a + \sqrt{a^2+1}}{-a + \sqrt{a^2+1}} = \ln 25$$

$$\frac{a + \sqrt{a^2+1}}{-a + \sqrt{a^2+1}} = 25 \Rightarrow a + \sqrt{a^2+1} = 25\sqrt{a^2+1} - 25a$$

$$26a = 24\sqrt{a^2+1} \Rightarrow 13a = 12\sqrt{a^2+1} \quad / \cdot ()^2$$

$$169a^2 = 144(a^2+1)$$

$$169a^2 = 144a^2 + 144$$

$$25a^2 = 144 \Rightarrow a^2 = \frac{144}{25} \Rightarrow a = \pm 2.4$$

$a > 0$ , לכן:  $a = 2.4$ .

**גבי יקואל**

**משוב צת**

**[www.mishbetzet.co.il](http://www.mishbetzet.co.il)**

**טלפון: 04-8200929**

**ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה**

**♦ לכל הכיתות ♦ לכל השאלונים ♦ לכל הרמות**