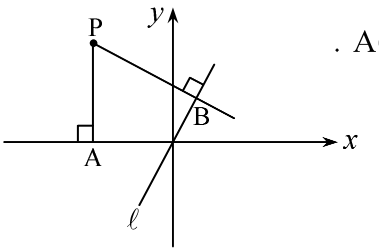
פתרון מבחן מס' 3 (ספר לימוד – שאלון 035807)



(1) (א) נסמן: $y_P = p$, $x_P = t$. מכאן: $A(t,0)$.

נמצא את משוואת PB :

$$PB \perp \ell \;\;\Rightarrow\;\; m_{PB} \cdot m_{\ell} = -1$$

$$m_{PB} \cdot 3 = -1 \;\;\Rightarrow\;\; m_{PB} = -\tfrac{1}{3}$$

$$y - y_P = m_{PB}(x - x_P)$$

$$y - p = -\tfrac{1}{3}(x - t) \;\;\Rightarrow\;\; y = -\tfrac{x}{3} + p + \tfrac{t}{3}$$

שיעורי הנקודה B :

$$3x = -\tfrac{x}{3} + p + \tfrac{t}{3}$$

$$\frac{10x}{3} = p + \frac{t}{3} \;\;\Rightarrow\;\; x_B = \frac{3}{10}p + \frac{t}{10} = \frac{3p+t}{10}$$

$$y_B = 3 \cdot \frac{3p+t}{10} = \frac{9p+3t}{10}$$

$$AB = 9 \;\;\Rightarrow\;\; \sqrt{\left(\frac{3p+t}{10} - t\right)^2 + \left(\frac{9p+3t}{10} - 0\right)^2} = 9$$

$$\left(\frac{3p-9t}{10}\right)^2 + \left(\frac{9p+3t}{10}\right)^2 = 81$$

$$\frac{9p^2 - 54pt + 81t^2}{100} + \frac{81p^2 + 54pt + 9t^2}{100} = 81$$

$$90t^2 + 90p^2 = 8{,}100 \;\;\Rightarrow\;\; t^2 + p^2 = 90$$

$$\begin{cases} y = 3x \\ x^2 + y^2 = 90 \end{cases} \;\;\Rightarrow\;\; x^2 + 9x^2 = 90 \;\;\Rightarrow\;\; x^2 = 9 \;\;\Rightarrow\;\; \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 9 \end{cases}$$

$x^2 + y^2 = 90$, אבל הנקודה P לא יכולה להימצא על הישר ℓ ,
לכן המקום הגיאומטרי הוא מעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 = 90$,
מלבד הנקודות $(\pm 3, \pm 9)$.

(ב) $M(x_M, y_M)$. נסמן: $|x_M| = |y_M| = k$. מכאן: $k^2 + k^2 = 90$

$$k^2 = 45 \;\;\Rightarrow\;\; k = \pm\sqrt{45} = \pm 3\sqrt{5}$$

$$M_1(3\sqrt{5}, 3\sqrt{5}) \;,\; M_2(3\sqrt{5}, -3\sqrt{5}) \;,$$

$$M_3(-3\sqrt{5}, 3\sqrt{5}) \;,\; M_4(-3\sqrt{5}, -3\sqrt{5})$$

(2) (א) $\ell \in \pi$: לפחות שני נקודות של ℓ נמצאות ב- π .

$$(2,0,-8)\in\pi \ \Rightarrow\ 2m+0-8+2=0 \ \Rightarrow\ m=3$$

נציב $t=1$ ונבדוק האם נקודה עם שיעורים $(2+1\cdot 6, 0-7, -8+10)$

גם היא נמצאת ב- π :

$$3\cdot 8+4\cdot(-7)+2+2 \stackrel{?}{=} 0$$

$$24-28+4 \stackrel{?}{=} 0 \ \Rightarrow\ 0\equiv 0$$

כלומר עבור $m=3$, הישר ℓ מוכל במישור π .

(ב) נסמן ב- $M(a,b,2)$ את נקודת החיתוך בין הישר למישור ($m\neq 3$).

לפי שיעור ה- z של הישר ℓ :

$$2=-8+t\cdot 10 \ \Rightarrow\ t=1$$

$$M\ :\ (2,0,-8)+1\cdot(2m,-7,10)=(2+2m,-7,2)$$

גם נקודה זו נמצאת במישור π , לכן:

$$m(2+2m)+4\cdot(-7)+2+2=0$$

$$2m^2+2m-24=0 \ \Rightarrow\ m^2+m-12=0$$

$$m_{1,2}=\frac{-1\pm 7}{2} \ \Rightarrow\ m_1=3\ ,\ m_2=-4$$

הפתרון $m_1=3$ נפסל, כי במקרה זה ℓ מוכל ב- π , כלומר יש אינסוף נקודות משותפות ל- ℓ ול- π .

$$m=-4 \ \Rightarrow\ M(2-8,-7,2) \ \Rightarrow\ M(-6,-7,2)$$

אזי, עבור $m=-4$ לישר ℓ ולמישור π יש נקודה משותפת אחת, $(-6,-7,2)$ ששיעור ה- z שלה שווה ל- 2 .

(3) פתרון לשאלה זו יעלה בימים הקרובים.

(4) (א) תחום ההגדרה של הפונקציה $e^x - e^{-x} \neq 0$, כלומר $e^x \neq e^{-x}$, כלומר $x \neq 0$.

$$f'(x) = \frac{(e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x} - 2e^0 + e^{-2x} - e^{2x} - 2e^0 - e^{-2x}}{(e^x - e^{-x})^2} = \frac{-4}{(e^x - e^{-x})^2}$$

מכיוון ש- $f'(x) < 0$ לכל $x \neq 0$, הרי שהפונקציה יורדת לכל x בתחום הגדרתה.

(ב) עבור $x = 0$ המכנה של $f(x)$ מתאפס והמונה אינו מתאפס, לכן $x = 0$ היא משוואת האסימפטוטה לגרף הפונקציה המקבילה לציר ה- y .

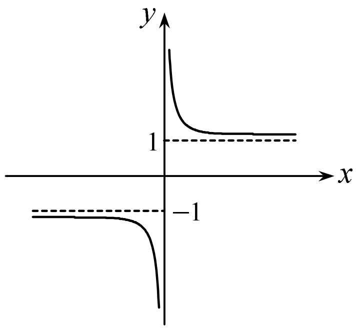
כאשר $x \to \infty$, $f(x) \to 1$

כאשר $x \to -\infty$, $f(x) \to -1$

לכן $y = -1$, $y = 1$ הן משוואות האסימפטוטות לגרף הפונקציה המקבילות לציר ה- x .

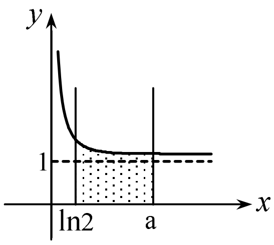
(ג) נתאר סקיצה של גרף הפונקציה.

בעזרת סעיפים (א) ו- (ב) נקבל:



(ד) נתאר את השטח הנתון,

בסרטוט משמאל:



$$S = \int_{\ln 2}^{a} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\,dx$$

מכיוון ש- $(e^x - e^{-x})' = e^x + e^{-x}$

הרי ש- $\int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\,dx = \ln\left|e^x - e^{-x}\right| + c$

ואז:

המשך בעמוד הבא ▶▶▶

$$S=\ln(e^x-e^{-x})\Big|_{\ln 2}^{a}=\ln(e^a-e^{-a})-\ln(e^{\ln 2}-e^{-\ln 2})=$$

$$=\ln\left(e^a-\frac{1}{e^a}\right)-\ln\left(2-\frac{1}{2}\right)=\ln\frac{e^a-\frac{1}{e^a}}{\frac{3}{2}}$$

מהנתון כי השטח הוא $\ln 5-\ln 2$, כלומר $\ln\frac{5}{2}$, נקבל את המשוואה:

$$\frac{5}{2}=\frac{e^a-\frac{1}{e^a}}{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{15}{4}=e^a-\frac{1}{e^a}$$

נסמן: $e^a=t$ $(t>0)$, ונקבל את המשוואה: $\frac{15}{4}=t-\frac{1}{t}$

שפתרונותיה: $t_2=-\frac{1}{4}$, $t_1=4$ (t_2 אינו בתחום ההצבה).

$$e^a=4 \ \Rightarrow\ a=\ln 4$$

(5) (א) $f'(x)=1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-k$

$$f'(x)=0\ \Rightarrow\ \ln x+1-k=0\ \Rightarrow\ \ln x=k-1\ \Rightarrow\ x=e^{k-1}$$

$$f''(x)=\frac{1}{x}$$

$f''(e^{k-1})>0\ \Rightarrow$ נקודת מינימום

$$f(e^{k-1})=e^{k-1}\cdot\ln e^{k-1}-ke^{k-1}=e^{k-1}(k-1)-ke^{k-1}=-e^{k-1}$$

כלומר: $\min(e^{k-1},-e^{k-1})$, ונקודה זו נמצאת על הישר $y=-x$

לכל ערך של k .

(ב) נתון: $f'(e^3)=1$, כלומר: $\ln e^3+1-k=1$

$$3+1-k=1\ \Rightarrow\ k=3$$

$$f(e^3)=e^3\ln e^3-3e^3=e^3\cdot 3-3e^3=0$$

כלומר שיעורי נקודת ההשקה $(e^3,0)$ ושיפוע המשיק הוא 1 ,

לכן משוואת המשיק היא: $y-0=1(x-e^3)\ \Rightarrow\ y=x-e^3$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

ג)
$$y' = x\ln x + \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{2}x = x\ln x$$

$$\int_1^3 (x\ln x - \mathrm{k}x)\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{\mathrm{k}x^2}{2}\Big|_1^3 =$$

$$= \left(\frac{9}{2}\ln 3 - \frac{9}{4} - \frac{9\mathrm{k}}{2}\right) - \left(0 - \frac{1}{4} - \frac{\mathrm{k}}{2}\right) =$$

$$= \frac{9}{2}\ln 3 - 2 - 4\mathrm{k}$$

מכיוון שהשטח נמצא ברביע הרביעי, הרי שערך האינטגרל שמצאנו שלילי,
ולכן השטח שווה ל- $2 + 4\mathrm{k} - \frac{9}{2}\ln 3$ יחידות שטח.

מכאן נקבל את המשוואה: $2 + 4\mathrm{k} - \frac{9}{2}\ln 3 = 22 - 9\ln\sqrt{3}$

מכיוון ש- $\frac{9}{2}\ln 3 = 9\ln\sqrt{3}$, נקבל: $2 + 4\mathrm{k} = 22$

כלומר $\mathrm{k} = 5$.

גבי יקואל

משבצת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

◈ לכל הכיתות ◈ לכל השאלונים ◈ לכל הרמות