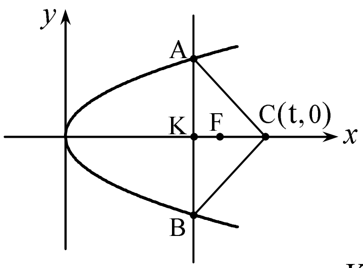
פתרון מבחן מס' 2 (ספר לימוד – שאלון 035807)



(1) שיעור ה- x של מוקד הפרבולה: $\frac{p}{2} > 2$,

כלומר מוקד הפרבולה וגם נקודת חיתוך תיכוני המשולש ABC נמצאים מימין לישר $x = 2$.

(א) CK תיכון לצלע AB ב- ΔABC , $K(2,0)$,

$A(2, 2\sqrt{p})$, $B(2, -2\sqrt{p})$.

$KF = \frac{1}{2}FC$ (נקודת חיתוך התיכונים במשולש מחלקת כל תיכון ביחס $2:1$ כך שחלקו הגדול צמוד לקדקוד).

$$KF = \frac{p}{2} - 2 \quad \Rightarrow \quad KC = 3 \cdot KF = \frac{3p}{2} - 6$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot KC}{2} = \frac{4\sqrt{p} \cdot (\frac{3}{2}p - 6)}{2} = 3p\sqrt{p} - 12\sqrt{p} = 3\sqrt{p}\,(p-4)$$

(ב) נקודת חיתוך האנכים האמצעיים במשולש היא מרכז המעגל החוסם את המשולש: $FA = FC = R$.

$$FA = \sqrt{\left(2 - \frac{p}{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{p} - 0\right)^2} \quad , \quad FC = t - \frac{p}{2}$$

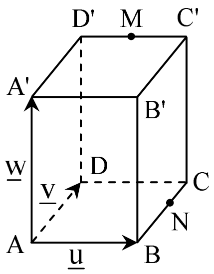
$$FA = FC \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\left(2 - \frac{p}{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{p} - 0\right)^2} = t - \frac{p}{2}$$

$$4 - 2p + \frac{p^2}{4} + 4p = t^2 - pt + \frac{p^2}{4} \quad \Rightarrow \quad t^2 - pt - 2p - 4 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 + 8p + 16}}{2} = \frac{p \pm \sqrt{(p+4)^2}}{2} = \frac{p \pm (p+4)}{2}$$

$$t_1 = \frac{p + p + 4}{2} = p + 2 \quad \Rightarrow \quad C_1 = (p+2, 0)$$

$$t_2 = \frac{p - p - 4}{2} = -2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = (-2, 0)$$



(2) (א) נתון: $D'M = MC'$.

לפי "הליכה על פני הוקטורים":

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{D'M} =$$

$$= \underline{w} + \underline{v} + \tfrac{1}{2}\underline{u} = \tfrac{1}{2}\underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$$

(ב) נתון: $\left|\overrightarrow{AM}\right| = 4$.

נסמן ב- α את הזווית בין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

$$\left|\overrightarrow{AM}\right| = 4 \ \Rightarrow\ \sqrt{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AM}} = 4$$

$$\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\underline{u}+\underline{v}+\underline{w}\right)\cdot\left(\tfrac{1}{2}\underline{u}+\underline{v}+\underline{w}\right)} = 4$$

$$\tfrac{1}{4}\left|\underline{u}\right|^2 + \left|\underline{v}\right|^2 + \left|\underline{w}\right|^2 + \underline{u}\cdot\underline{v} + \cancel{\underline{u}\cdot\underline{w}}^{\,0} + 2\,\cancel{\underline{v}\cdot\underline{w}}^{\,0} = 16$$

$$\tfrac{1}{4}\cdot 2^2 + 2^2 + 3^2 + \left|\underline{u}\right|\cdot\left|\underline{v}\right|\cdot\cos\alpha = 16$$

$$2\cdot 2\cdot\cos\alpha = 2 \ \Rightarrow\ \cos\alpha = \tfrac{1}{2} \ \Rightarrow\ \alpha_1 = 60^\circ\ ,\ \alpha_2 = 300^\circ$$

לא ייתכן $\alpha_2 = 300^\circ$, כי לא תיתכן במעוין זווית הגדולה מ- 180° .

תשובה: $\alpha = 60^\circ$.

(ג)

$$\overrightarrow{NC} = t\cdot\underline{v}\ ,\ \left|\overrightarrow{AM}\right| = \left|\overrightarrow{NM}\right| = 4$$

$$\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'M} = t\cdot\underline{v} + \underline{w} - \tfrac{1}{2}\underline{u}$$

$$\left|\overrightarrow{NM}\right| = 4 \ \Rightarrow\ \sqrt{\left(-\tfrac{1}{2}\underline{u}+t\cdot\underline{v}+\underline{w}\right)\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\underline{u}+t\cdot\underline{v}+\underline{w}\right)} = 4$$

$$\tfrac{1}{4}\left|\underline{u}\right|^2 + t^2\cdot\left|\underline{v}\right|^2 + \left|\underline{w}\right|^2 - t\cdot\underline{u}\cdot\underline{v} - \cancel{\underline{u}\cdot\underline{w}}^{\,0} + 2t\cdot\cancel{\underline{v}\cdot\underline{w}}^{\,0} = 16$$

$$\tfrac{1}{4}\cdot 4 + t^2\cdot 4 + 9 - t\cdot 2\cdot 2\cdot\tfrac{1}{2} = 16$$

$$4t^2 - 2t - 6 = 0 \ \Rightarrow\ 2t^2 - t - 3 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{1\pm 5}{4} \ \Rightarrow\ t_1 = 1.5\ ,\ t_2 = -1$$

(3) (א) נעביר את המספר $(-16-16\sqrt{3}\,i)$ לצורה טריגונומטרית:

$$r=\sqrt{16^2+16^2\cdot 3}=32\ ,\ \tan\theta=\frac{-16\sqrt{3}}{-16}=\sqrt{3}$$

$\theta=240°$ או $\theta=60°$, אבל המספר נמצא ברביע III , לכן $\theta=240°$.

$$z^5=32\,\mathrm{cis}\,240° \ \Rightarrow\ z=\sqrt[5]{32}\,\mathrm{cis}\,\frac{240°+360°k}{5}$$

$$=2\,\mathrm{cis}(48°+72°k)\ ,\ k=0,1,2,3,4$$

$$z_1=2\,\mathrm{cis}\,48°=2(\cos 48°+i\sin 48°)=1.338+1.486i$$

$$z_2=2\,\mathrm{cis}(48°+72°)=2(\cos 120°+i\sin 120°)=-1+\sqrt{3}\,i$$

$$z_3=2\,\mathrm{cis}(48°+72°\cdot 2)=2(\cos 192°+i\sin 192°)=$$
$$=-1.956-0.416i$$

$$z_4=2\,\mathrm{cis}(48°+72°\cdot 3)=2(\cos 264°+i\sin 264°)=$$
$$=-0.209-1.989i$$

$$z_5=2\,\mathrm{cis}(48°+72°\cdot 4)=2(\cos 336°+i\sin 336°)=$$
$$=1.827-0.813i$$

(ב)

$$A=\frac{z_5}{z_2}=\frac{2\,\mathrm{cis}336°}{2\,\mathrm{cis}120°}=\mathrm{cis}(336°-120°)=\mathrm{cis}\,216°$$

$$B={z_1}^2=(2\,\mathrm{cis}\,48°)^2=4\,\mathrm{cis}(48°\cdot 2)=4\,\mathrm{cis}\,96°$$

הזווית בין הישר ℓ (OA) לבין הכיוון החיובי של ציר ה- x : $\theta_A=216°$

הזווית בין הישר p (OB) לבין הכיוון החיובי של ציר ה- x : $\theta_B=96°$

הזווית בין הישרים ℓ ו- p : $\alpha=216°-96°=120°$

כאשר מדברים על זווית בין ישרים, מדברים על זווית חדה, לכן הזווית

בין הישרים היא הזווית הצמודה ל- $120°$: $\alpha=180°-120°=60°$

(4) $f(x)=\frac{2}{1+\mathrm{b}e^x}$, $\mathrm{b}>0$.

$1+\mathrm{b}e^x>0$ לכל x , לכן תחום ההגדרה הוא: כל x .

(א) לגרף הפונקציה אין אסימפטוטות אנכיות.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1+\mathrm{b}e^x}=\left(\frac{2}{\infty}\right)=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{1+\frac{\mathrm{b}}{e^{-x}}}=\frac{2}{1+0}=2$$

משוואות אסימפטוטות אופקיות: $y_{\text{ימנית}}=0$, $y_{\text{שמאלית}}=2$.

(ב) $$f'(x)=-\frac{2}{(1+\mathrm{b}e^x)^2}\cdot(0+\mathrm{b}e^x)=-\frac{2\mathrm{b}e^x}{(1+\mathrm{b}e^x)^2}$$

$\mathrm{b}>0$, $e^x>0$, לכן $f'(x)<0$ לכל ערך של x ,

כלומר הפונקציה $f(x)$ יורדת בכל תחום הגדרתה.

(ג) $$f''(x)=-2\mathrm{b}\cdot\left[\frac{e^x}{(1+\mathrm{b}e^x)^2}\right]'=$$

$$=-2\mathrm{b}\cdot\frac{e^x(1+\mathrm{b}e^x)^2-e^x\cdot2\cdot(1+\mathrm{b}e^x)\cdot\mathrm{b}e^x}{(1+\mathrm{b}e^x)^4}=$$

$$=\frac{-2\mathrm{b}e^x(1+\mathrm{b}e^x)(1+\mathrm{b}e^x-2\mathrm{b}e^x)}{(1+\mathrm{b}e^x)^4}=\frac{-2\mathrm{b}e^x(1-\mathrm{b}e^x)}{(1+\mathrm{b}e^x)^3}$$

$$f''(x)=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{-2\mathrm{b}e^x(1-\mathrm{b}e^x)}{(1+\mathrm{b}e^x)^3}=0$$

$e^x\neq0$, $\mathrm{b}\neq0$, לכן:

$$1-\mathrm{b}e^x=0 \quad\Rightarrow\quad e^x=\frac{1}{\mathrm{b}} \quad\Rightarrow\quad y=\frac{2}{1+\mathrm{b}\cdot\frac{1}{\mathrm{b}}}=1$$

המרחקים של נקודת הפיתול $(x,1)$ עד האסימפטוטות שווים זה לזה:

$$2-1\stackrel{?}{=}1-0 \quad\Rightarrow\quad 1=1$$

(5) (א) תחום הגדרה:

$$5x^2-4x>0 \;\Rightarrow\; x(5x-4)>0$$

$$x<0 \;,\; x>\tfrac{4}{5}$$

(ב)

$$y'=\frac{10x-4}{5x^2-4x}$$

$$y'=0 \;\Rightarrow\; \frac{10x-4}{5x^2-4x}=0 \;\Rightarrow\; 10x-4=0 \;\Rightarrow\; x=\tfrac{2}{5}$$

נקודה חשודה זו לא שייכת לתחום ההגדרה,

לכן אין נקודות על גרף הפונקציה שבהן $y'=0$.

(ג)

$$y''=\left(\frac{10x-4}{5x^2-4x}\right)'=\frac{10\,(5x^2-4x)-(10x-4)\,(10x-4)}{(5x^2-4x)^2}=$$

$$=\frac{50x^2-40x-(100x^2-80x+16)}{(5x^2-4x)^2}=\frac{-50x^2+40x-16}{(5x^2-4x)^2}$$

$$y''=0 \;\Rightarrow\; -50x^2+40x-16=0 \;\Rightarrow\; 25x^2-20x+8=0$$

$$\Delta=400-800<0 \;\Rightarrow\; y''\neq 0$$

מכאן ש $y''<0$ בכל תחום ההגדרה,

לכן הגרף של הפונקציה y קעור כלפי מטה בכל תחום ההגדרה.

(ד) שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y :

$x=0 \;\Rightarrow$ לא שייך לתחום ההגדרה $\Rightarrow$ אין נקודות חיתוך

שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x :

$$y=0 \;\Rightarrow\; \ln(5x^2-4x)=0 \;\Rightarrow\; 5x^2-4x=1$$

$$5x^2-4x-1=0 \;\Rightarrow\; x_1=1 \;,\; x_2=-\tfrac{1}{5}$$

$$x_1=1 \;\Rightarrow\; y_1=0 \;\Rightarrow\; (1,0)$$

$$x_2=-\tfrac{1}{5} \;\Rightarrow\; y=0 \;\Rightarrow\; \left(-\tfrac{1}{5},0\right)$$

המשך בעמוד הבא >>>

(ה) משוואות אסימפטוטות:

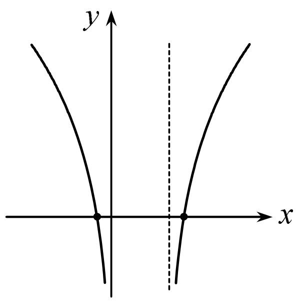
$$\lim_{x\to 0^-} \ln(5x^2-4x)=[\ln 0]=-\infty$$

$$\lim_{x\to \frac{4}{5}^+} \ln(5x^2-4x)=[\ln 0]=-\infty$$

כלומר משוואות האסימפטוטות לגרף הפונקציה המקבילות לצירים:

$$x=0\ ,\ x=\frac{4}{5}$$

(ו)



גבי יקואל

משבצת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

◈ לכל הכיתות ◈ לכל השאלונים ◈ לכל הרמות