פתרון מבחן מס' 15 (ספר לימוד – שאלון 035806)

(1) (א) + (ב) נסמן ב- x קמ"ש את מהירות המשאית, ב- y קמ"ש את מהירות המכונית, ב- S ק"מ את המרחק בין הערים וב- t שעות את הזמן שעבר בין הפגישה השנייה לפגישה השלישית,

ואז 2t שעות יסמן את הזמן שעבר בין הפגישה הראשונה לפגישה השנייה,

2t + 2 שעות יסמן את הזמן מיציאת כלי הרכב ועד הפגישה השנייה

ו- 3t + 2 שעות יסמן את הזמן מיציאת כלי הרכב ועד הפגישה השלישית.

הפגישה הראשונה הייתה שעתיים אחרי יציאת כלי הרכב,

לכן שני כלי הרכב עברו ביחד את כל המרחק AB , כלומר: $2(x+y)=\text{S}$ ①

עד הפגישה השנייה, הפרש המרחקים שעברו כלי הרכב הוא AB , לכן:

② $(2\text{t}+2)(y-x)=\text{S}$

עד הפגישה השלישית, סכום המרחקים שעברו כלי הרכב הוא $3\cdot\text{AB}$, לכן:

③ $(3\text{t}+2)(x+y)=3\text{S}$

נחלק אגפי משוואה ③ באגפים מתאימים של משוואה ① ונקבל:

$$\frac{3\text{t}+2}{2}=3 \quad\Rightarrow\quad 3\text{t}=4 \quad\Rightarrow\quad \text{t}=\frac{4}{3} \quad ④$$

נציב את ④ במשוואה ② ונקבל:

$$(\tfrac{8}{3}+2)(y-x)=\text{S} \quad\Rightarrow\quad (y-x)\cdot\frac{14}{3}=\text{S} \quad ⑤$$

נחלק אגפי משוואה ⑤ באגפים מתאימים של משוואה ① ונקבל:

$$\frac{y-x}{x+y}\cdot\frac{14}{3\cdot 2}=1 \quad\Rightarrow\quad 7y-7x=3x+3y \quad\Rightarrow\quad 4y=10x \quad\Rightarrow\quad y=2.5x$$

נציב במשוואה ① ונקבל: $2\cdot\frac{7}{2}x=\text{S} \quad\Rightarrow\quad \text{S}=7x$

הפגישה השלישית התקיימה במרחק 40 ק"מ מ- B , לכן:

$$(3\text{t}+2)\cdot x=\text{S}-40 \quad\Rightarrow\quad 6x=7x-40 \quad\Rightarrow\quad x=40$$

$$y=2.5\cdot 40=100 \ , \ \text{S}=7\cdot 40=280$$

תשובה: מהירות המשאית היא 40 קמ"ש,

מהירות המכונית היא 100 קמ"ש והמרחק בין הערים הוא 280 ק"מ.

(2)

$$a_n \;:\; 1\;,\;-5\;,\;9\;,\;-13\;,\;17\;,\;-21\;,\;\dots$$

$$|a_n| \;:\; 1\;,\;5\;,\;9\;,\;13\;,\;17\;,\;21\;,\;\dots$$

$$a_1 = 1\;,\;d = 4$$

כלומר:

$$|a_n| = 1 + 4(n-1) = 4n - 3$$

(א)

$$a_n = (-1)^{n-1}\cdot|a_n| = (-1)^{n-1}\cdot(4n-3)$$

(ב)

$$a_{2n} = (-1)^{2n-1}\cdot|4\cdot 2n - 3| = -(8n-3) = 3 - 8n$$

(ג) (i)

$$S_{2n} = 1 - 5 + 9 - 13 + \dots + a_{2n-1} - a_{2n} =$$
$$= (1-5) + (9-13) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n}) =$$
$$= -4 - 4 - 4 - \dots - 4 = -4\cdot\frac{2n}{2} = -4n$$

(ii)

$$S_{2n-1} = S_{2n} - a_{2n} = -4n - (3-8n) = 4n - 3$$

(ד)

$$S_{2n} = -104 \;\;\Rightarrow\;\; -4n = -104 \;\;\Rightarrow\;\; n = 26$$

$$S_{\text{אי-זוגיים}} = a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{51} = 1 + 9 + 17 + \dots + a_{51}$$

המחוברים מהווים סדרה חשבונית שבה:

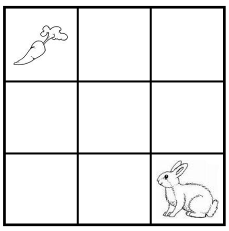
$$A_1 = a_1 = 1$$

$$D = a_2 - a_1 = 9 - 1 = 8$$

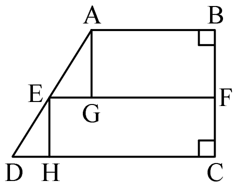
$$N = \frac{2n}{2} = n = 26$$

$$S_{\text{אי-זוגיים}} = (2\cdot 1 + 8\cdot 25)\cdot\frac{26}{2} = 202\cdot 13 = 2{,}626$$

(3) כדי לזכות בגזר, בארנב חייב לזוז בדיוק פעמיים למעלה ובדיוק פעמיים שמאלה (הסדר לא חשוב), ואז:



$$P_4(2)_{\text{למעלה}} = P_4(2)_{\text{שמאלה}} = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 =$$
$$= 6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{6}{18} = \frac{3}{8}$$



(4) $AB \parallel EF \parallel DC$, $\measuredangle B = \measuredangle C = 90°$

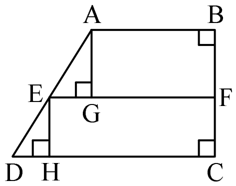
$DC = b$, $AB = a$, $S_{ABFE} = S_{EFCD}$

(א) נסמן : $EF = x$.

BF ו- FC הם גבהים בטרפזים ABFE ו- EFCD בהתאמה.

$$S_{ABFE} = S_{EFCD} \quad \Rightarrow \quad \frac{AB+EF}{2} \cdot BF = \frac{DC+EF}{2} \cdot FC$$

$$\frac{BF}{FC} = \frac{DC+EF}{AB+EF} = \frac{b+x}{a+x}$$



(ב) $AG \perp EF \quad \Rightarrow \quad \measuredangle G = 90°$

$EH \perp DC \quad \Rightarrow \quad \measuredangle H = 90°$

$\measuredangle G = \measuredangle H$ (שני גדלים השווים לגודל שלישי שווים ביניהם.)

$\measuredangle AEG = \measuredangle EDH$ זוויות מתאימות בין מקבילים ($EF \parallel DC$) וחותך (AD) שוות זו לזו.

$\Downarrow$

$\Delta AEG \sim \Delta EDH$ לפי משפט דמיון ז.ז.

$\Downarrow$

$(*) \quad \frac{AG}{EH} = \frac{EG}{DH}$ פרופורציית צלעות מתאימות במשולשים דומים.

ABFG , EFCH – מלבנים מרובעים בעלי שלוש זוויות ישרות.

$\Downarrow$

$GF = AB = a$ במלבן אורכי צלעות נגדיות שווים זה לזה.

$\Downarrow$

$EG = x - a$, $DH = b - x$ חיסור קטעים.

$\Downarrow$

$\frac{AG}{EH} = \frac{x-a}{b-x}$ הצבה במשוואה $(*)$. מ.ש.ל.

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

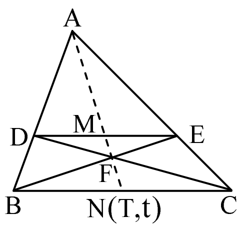
(ג) $FC = EH \ , \ BF = AG$ במלבן אורכי צלעות נגדיות שווים זה לזה.

לפי תוצאות סעיפים (א) ו- (ב):

$$\frac{BF}{FC} = \frac{AG}{EH} \ \Rightarrow \ \frac{b+x}{a+x} = \frac{x-a}{b-x}$$

$$b^2 - x^2 = x^2 - a^2 \ \Rightarrow \ 2x^2 = a^2 + b^2 \ \Rightarrow \ 2EF^2 = AB^2 + DC^2$$

מ.ש.ל.



(5) נראה שהמשך AM, התיכון לצלע DE במשולש ADE,

חותך את BC בנקודה N.

נסמן ב- T את נקודת החיתוך של המשך AM עם BC.

$ME \parallel NC$ (כי נתון $DE \parallel BC$)

לכן: $\frac{AM}{AT} = \frac{ME}{TC}$ (לפי משפט תאלס המורחב)

באופן דומה מתקיים: $\frac{AM}{AT} = \frac{DM}{BT}$, ומכאן לפי כלל המעבר: $\frac{ME}{TC} = \frac{DM}{BT}$.

אבל נתון: $DM = ME$ (כלומר המונים בפרופורציה שווים),

ולכן: $BT = NT$, כלומר הנקודה T מתלכדת עם הנקודה N.

כדי להראות שהנקודות N , F , M , A נמצאות על ישר אחד,

נשאר להראות שהמשך MF חוצה את BC.

נסמן ב- t את נקודת החיתוך של המשך MF עם BC.

$\Delta EMF \sim \Delta BtF$ לפי משפט דמיון ז.ז

($\measuredangle MFE = \measuredangle tFB$ זוויות קדקודיות,

$\measuredangle MEF = \measuredangle tBF$ זוויות מתחלפות שוות בין ישרים מקבילים)

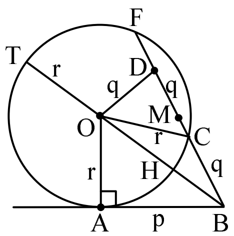
מכאן: $\frac{MF}{Ft} = \frac{ME}{Bt}$.

באופן דומה, $\Delta DMF \sim \Delta CtF$ ואז: $\frac{DM}{Ct} = \frac{MF}{FN}$.

מכאן נקבל: $\frac{DM}{Ct} = \frac{ME}{Bt}$.

אבל $DM = ME$, ולכן $Bt = Ct$, כלומר הנקודה t מתלכדת עם N,

ואז הנקודות N , F , M , A נמצאות על ישר אחד.



(6) (א) $AO \perp AB$ (משיק מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה)

לפי משפט פיתגורס ב- ΔAOB נקבל:

$$BO = \sqrt{r^2 + p^2}$$

$$BH = BO - r = \sqrt{r^2 + p^2} - r$$

$$BT = BO + r = \sqrt{r^2 + p^2} + r$$

$$BC \cdot BF = BH \cdot BT = AB^2$$

(מכפלת חותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק)

מכאן:
$$q(2q + DF) = (\sqrt{r^2 + p^2} - r)(\sqrt{r^2 + p^2} + r) = p^2$$

$$q(2q + DF) = p^2 \quad \Rightarrow \quad DF = \frac{p^2}{q} - 2q = \frac{p^2 - 2q^2}{q}$$

$$BF = 2q + DF = 2q + \frac{p^2 - 2q^2}{q} = \frac{p^2}{q}$$

$$BM = MF = \frac{BF}{2} = \frac{p^2}{2q}$$

$$MC = BM - BC = \frac{p^2}{2q} - q = \frac{p^2 - 2q^2}{2q}$$

$$MD = MF - DF = \frac{p^2}{2q} - \frac{p^2 - 2q^2}{q} = \frac{p^2 - 2(p^2 - 2q^2)}{2q} = \frac{4q^2 - p^2}{2q}$$

(ב) נפלה טעות בשאלה.

(ג) לפי משפט הקוסינוסים ב- ΔODC:

$$r^2 = q^2 + q^2 - 2 \cdot q \cdot q \cdot \cos \measuredangle ODC$$

$$\cos \measuredangle ODC = \frac{2q^2 - r^2}{2q^2}$$

לפי משפט הקוסינוסים ב- ΔODB:

$$BO^2 = q^2 + (2q^2) - 2 \cdot q \cdot 2q \cdot \cos \measuredangle ODC$$

$$r^2 + p^2 = 5q^2 - 4q^2 \cdot \frac{2q^2 - r^2}{2q^2}$$

$$r^2 + p^2 = 5q^2 - 2(2q^2 - r^2)$$

$$r^2 + p^2 = q^2 + 2r^2 \quad \Rightarrow \quad r^2 + q^2 = p^2$$

(7) (א)
$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin x+\frac{6b\cdot\cos x}{3b^2-4b+3}\right)dx=$$
$$=\left(-\cos x+\frac{6b}{3b^2-4b+3}\cdot\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$
$$=0+\frac{6b}{3b^2-4b+3}\cdot 1-(-1+0)=1+\frac{6b}{3b^2-4b+3}$$ יחידות שטח

(ב) פונקציית המטרה:
$$S(b)=1+6\cdot\frac{b}{3b^2-4b+3}$$
$$S'(b)=6\cdot\frac{3b^2-4b+3-b(6b-4)}{(3b^2-4b+3)^2}=6\cdot\frac{-3b^2+3}{(3b^2-4b+3)^2}$$
$$S'(b)=0\ \Rightarrow\ 6\cdot\frac{-3b^2+3}{(3b^2-4b+3)^2}=0\ \Rightarrow\ b_1=1\ ,\ b_2=-1$$
הפתרון $b_2=-1$ נפסל כי נתון $b>0$.

b	$0<b<1$	$b=1$	$b>1$
$S'(b)$	$+$	0	$-$
$S(b)$	↗	max	↘

$$S'\left(\tfrac{1}{2}\right)=-18\cdot\frac{(-)}{(+)}>0\qquad S'(2)=-18\cdot\frac{(+)}{(+)}<0$$

תשובה: עבור $b=1$ השטח האפור הוא מקסימלי.

(ג) השטח המקסימלי הוא:
$$S_{max}=S(1)=1+6\cdot\frac{1}{3-4+3}=1+3=4$$ יחידות שטח

(8) (א) (i) לפי הטבלה, $f'(x)=0$ כאשר:
$$x_1=b\ \Rightarrow\ y_1=q\ \Rightarrow\ (b,q)$$
$$x_2=d\ \Rightarrow\ y_2=s\ \Rightarrow\ (d,s)$$
$\max(b,q)$ (הנגזרת מחליפה סימן מפלוס למינוס)

$\min(d,s)$ (הנגזרת מחליפה סימן ממינוס לפלוס)

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(*ii*) הפונקציה $f(x)$ עולה כאשר $0 \le x < \mathrm{b}$, $x > \mathrm{d}$
(נגזרת חיובית)

הפונקציה $f(x)$ יורדת כאשר $\mathrm{b} < x < \mathrm{d}$ (נגזרת שלילית)

(*iii*) $(\mathrm{c},\mathrm{r}) \Rightarrow$ נקודות קיצון של $f'(x) \Rightarrow f''(x) = 0$

(*iv*) הפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מעלה ($\bigcup$) כאשר:

$x > \mathrm{c} \Rightarrow$ הפונקציה $f'(x)$ עולה $\Rightarrow f''(x) > 0$

הפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מטה ($\bigcap$) כאשר:

$0 < x < \mathrm{c} \Rightarrow$ הפונקציה $f'(x)$ יורדת $\Rightarrow f''(x) < 0$

(*v*) $y - y_0 = \mathrm{m}_0(x - x_0) \;\Rightarrow\; y - \mathrm{r} = \mathrm{m}(x - \mathrm{c})$

$y = \mathrm{m}x + \mathrm{r} - \mathrm{mc}$

(ב) ראו פתרון הסעיף בספר, עמוד **1,759** .

(ג) (*i*) נכון (מהנתון שהמשיק לגרף הפונקציה $f'(x)$ בנקודה $x = \mathrm{a}$
מקביל לציר ה- x , נקבל: $f''(\mathrm{a}) = 0$).

(*ii*) נכון (לפי סעיף (א)(*iv*)).

(*iii*) נכון לפי (ג)(*i*) ו- (ג)(*ii*) .
$(\mathrm{a},0)$ נקודת מקסימום של $f''(x)$,
מכיוון ש- $f''(x) < 0$ עבור $0 < x < \mathrm{c}$ ($x \ne \mathrm{a}$).

(ד) $f(x) > 0$ לכל $x \ge 0$, לכן נדרוש $f'(x) < 0$ וגם $f''(x) > 0$,
כלומר: $\mathrm{b} < x < \mathrm{d}$ וגם $x > \mathrm{c}$, לכן: $\mathrm{c} < x < \mathrm{d}$.

(ה) $x_1 = \mathrm{b}$, $x_2 = \mathrm{c}$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{f'(x)\,dx}{\sqrt{f(x)}} = \left(2\sqrt{f(x)}\right)\Big|_{\mathrm{b}}^{\mathrm{c}} = 2\left[\sqrt{f(\mathrm{c})} - \sqrt{f(\mathrm{b})}\,\right] =$$

$= 2(\sqrt{\mathrm{r}} - \sqrt{\mathrm{q}})$ יחידות שטח

(9) (א) נתון: $f''(2)=1$.

$$f''(x)=\frac{(3x^2-\text{b})\,(8-x^2)\sqrt{8-x^2}-(x^3-\text{b}x)\cdot\frac{3}{2}\sqrt{8-x^2}\cdot(-2x)}{(8-x^2)^3}=$$

$$=\frac{\sqrt{8-x^2}\,[\,(3x^2-\text{b})\,(8-x^2)+3x^2\,(x^2-\text{b}x)\,]}{(8-x^2)^3}$$

$$f''(2)=\frac{2\cdot(12-\text{b})\cdot 4+2\cdot 12\cdot(4-2\text{b})}{64}=$$

$$=\frac{96-8\text{b}+96-24\text{b}}{64}=\frac{192-32\text{b}}{64}$$

$$f''(2)=1 \;\Rightarrow\; 3-\frac{\text{b}}{2}=1 \;\Rightarrow\; \text{b}=4$$

$$f'(x)=\frac{x^3-4x}{(8-x^2)\sqrt{8-x^2}}=\frac{x\,(x-2)(x+2)}{(8-x^2)\sqrt{8-x^2}}$$

(ב) תחום הגדרה:

$$\begin{cases}(8-x^2)\sqrt{8-x^2}\neq 0\\ 8-x^2>0\end{cases}\;\Rightarrow\; |x|<2\sqrt{2}\;\Rightarrow\; -2\sqrt{2}<x<2\sqrt{2}$$

משוואות אסימפטוטות:

$$\lim_{x\to 2\sqrt{2}^-}\frac{x^3-4x}{(8-x^2)\sqrt{8-x^2}}=\left(\frac{8\sqrt{2}}{0^+}\right)=\infty \;\Rightarrow\; x=2\sqrt{2}$$

$$\lim_{x\to -2\sqrt{2}^+}\frac{x^3-4x}{(8-x^2)\sqrt{8-x^2}}=\left(\frac{-8\sqrt{2}}{0^+}\right)=-\infty \;\Rightarrow\; x=-2\sqrt{2}$$

אין צורך לבדוק אסימפטוטות אופקיות, בגלל תחום ההגדרה.

(ג) $$f''(x)=0 \;\Rightarrow\; \sqrt{8-x^2}\left[(3x^2-4)(8-x^2)+3x^2\,(x^2-4)\right]=0$$

$$\underbrace{\sqrt{8-x^2}}_{\text{חיובי בתחום ההגדרה}}\;(24x^2-3x^4-32+4x^2+3x^4-12x^2)=0$$

$$16x^2-32=0 \;\Rightarrow\; x^2=2$$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

$$x=\sqrt{2} \;\Rightarrow\; y=\frac{-2\sqrt{2}}{6\sqrt{6}}=-\frac{\sqrt{3}}{9} \;\Rightarrow\; \left(\sqrt{2},-\frac{\sqrt{3}}{9}\right)$$

$$x=-\sqrt{2} \;\Rightarrow\; y=\frac{2\sqrt{2}}{6\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{9} \;\Rightarrow\; \left(-\sqrt{2},\frac{\sqrt{3}}{9}\right)$$

נבדוק את סוג הקיצון. $\frac{16\sqrt{8-x^2}}{(8-x^2)^3}>0$ לכל x בתחום ההגדרה,

לכן הסימן של $f''(x)$ נקבע רק על-ידי הביטוי (x^2-2) , לכן :

$$\min\left(\sqrt{2},-\frac{\sqrt{3}}{9}\right)\;,\;\max\left(-\sqrt{2},\frac{\sqrt{3}}{9}\right)$$

(ד) הפונקציה $f'(x)$ עולה כאשר $\sqrt{2}<x\le 2\sqrt{2}$, $-2\sqrt{2}\le x<-\sqrt{2}$,
הפונקציה $f'(x)$ יורדת כאשר $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$.

(ה) שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f'(x)$ עם ציר ה- y :

$$x=0 \;\Rightarrow\; f'(x)=0 \;\Rightarrow\; (0,0)$$

שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f'(x)$ עם ציר ה- x :

$$y=0 \;\Rightarrow\; f'(x)=0 \;\Rightarrow\; \frac{x^3-4x}{(8-x^2)\sqrt{8-x^2}}=0$$

$$x(x-2)(x+2)=0 \;\Rightarrow\; x_1=0\;,\;x_2=-2\;,\;x_3=2$$

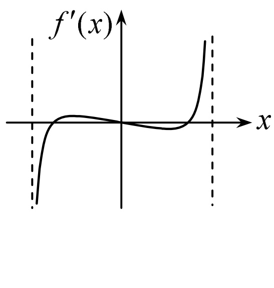
כלומר : $(-2,0)$, $(2,0)$, $(0,0)$.

(ו) הפונקציה $f'(x)$ היא אי-זוגית, כי :

$$f'(-x)=\frac{-x^3+4x}{(8-x^2)\sqrt{8-x^2}}=-\frac{x^3-4x}{(8-x^2)\sqrt{8-x^2}}=-f'(x)$$

תחום ההגדרה סימטרי סביב ציר ה- x ,

לכן גרף הפונקציה $f'(x)$ סימטרי סביב ראשית הצירים.



המשך בעמוד הבא ➤➤➤

(ז) (i) הפונקציה $f(x)$ מקבלת קיצון כאשר $f'(x)=0$ ומחליפה את סימנה, לכן עבור הפונקציה $f(x)$:

$\min\ :\ x=-2$

$\min\ :\ x=2$

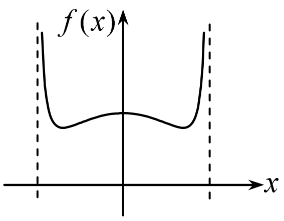
$\max\ :\ x=0$

(ii) הפונקציה $f(x)$ עולה כאשר $f'(x)>0$,
כלומר בתחומים: $2<x<2\sqrt{2}$, $-2<x<0$.
הפונקציה $f(x)$ יורדת כאשר $f'(x)<0$,
כלומר בתחומים: $0<x<2$, $-2\sqrt{2}<x<-2$.

(iii) לפונקציה $f(x)$ יש נקודות פיתול כאשר $f''(x)=0$,
כלומר עבור $x=\pm 2$ (לפי סעיף (ג)).

(iv) הפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מעלה כאשר $f''(x)>0$,
כלומר כאשר $f'(x)$ עולה, כלומר בתחומים:
$\sqrt{2}<x<2\sqrt{2}$, $-2\sqrt{2}<x<-\sqrt{2}$ (לפי סעיף (ד)).
הפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מטה כאשר $f''(x)<0$,
כלומר כאשר $f'(x)$ יורדת,
כלומר בתחום: $-2<x<\sqrt{2}$ (לפי סעיף (ד)).

(v) ראו סרטוט משמאל.



(ח) שיעור ה- x של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f''(x)$ עם ציר ה- x הן $x=\pm\sqrt{2}$ (לפי סעיף (ג)).

השטח המקווקו נמצא מתחת לציר ה- x , לכן:

$$S=-\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} f''(x)\,dx=[-f'(x)]\Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}=f'(-\sqrt{2})-f'(\sqrt{2})=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{9}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{9}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{9}$$ יחידות שטח

גבי יקואל

משבצת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

◈ לכל הכיתות ◈ לכל השאלונים ◈ לכל הרמות