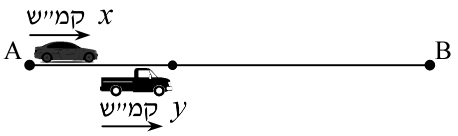
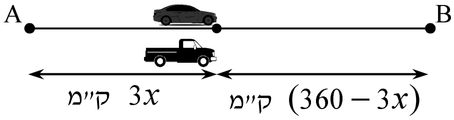
פתרון מבחן מס' 14 (ספר לימוד – שאלון 035806)

(1) נסמן ב- x קמ״ש את מהירות המכונית,

וב- y קמ״ש את מהירות המשאית.





המשאית הגיעה ל- B 4 שעות

לאחר המפגש עם המכונית,

כלומר נקבל את המשוואה: $4 = \frac{360-3x}{y}$.

המכונית עוברת את המרחק AB בשעתיים מהר יותר מהמשאית, כלומר:

$$\frac{360}{y}-\frac{360}{x}=2 \;\;\Rightarrow\;\; \frac{180}{y}-\frac{180}{x}=1$$

נפתור את מערכת שתי המשוואות שקיבלנו:

$$y=\frac{360-3x}{4} \;\;\Rightarrow\;\; \frac{180\cdot 4}{360-3x}-\frac{180}{x}=1$$

$$\frac{240}{120-x}-\frac{180}{x}=1 \;\;/\cdot x(120-x) \;\;\Rightarrow\;\; 240x-21,600+180x=120x-x^2$$

$$x^2+300x-21,600=0 \;\;\Rightarrow\;\; x_{1,2}=-150\pm 210$$

$$x_1=60 \;,\; x_2=-360$$

הפתרון x_2 נפסל כי המהירות לא יכולה להיות שלילית. מכאן:

$$x=60 \;,\; y=\frac{360-3\cdot 60}{4}=45$$

נסמן ב- t שעות את הזמן שחלף מהשעה 8:00 (יציאת המשאית)

ועד ליציאת המכונית לדרך.

עד למפגש שני הרוכבים עברו את אותה הדרך, לכן:

$$3\cdot x=(3+\mathrm{t})\cdot y \;\;\Rightarrow\;\; 3\cdot 60=(3+\mathrm{t})\cdot 45 \;\;\Rightarrow\;\; \mathrm{t}=1 \text{ שעה}$$

כלומר המכונית יצאה לדרך בשעה $8:00+1=9:00$.

את כל הדרך עברה המכונית ב- 6 שעות $=\frac{360}{60}$,

לכן, המכונית תגיע לנקודה B בשעה $9:00+6=15:00$.

(2) סדרה חשבונית נתונה $\{a_n\}$: $N = 203\ ,\ D = d\ ,\ A_1 = a_1$

(א) סדרת המקומות המחוקים $\{b_n\}$: $4\ ,\ 11\ ,\ 18\ ,\ .....\ ,\ 200$

$$b_1 = 4\ ,\ d_2 = 7\ ,\ n = ?$$

$$b_n = b_1 + d_2(n-1) = 4 + 7(n-1) = 71n - 3 = 200$$

$$71n - 3 = 200 \quad \Rightarrow \quad n = 29$$

תשובה: נמחקו 29 איברים.

(ב) האיברים המחוקים מהווים סדרה חשבונית:

$$a_{b_{n+1}} - a_{b_n} = a_1 + d(b_{n+1} - 1) - [a_1 + d(b_n - 1)] =$$
$$= d(b_{n+1} - b_n) = d \cdot 7 = 7d = d_2$$

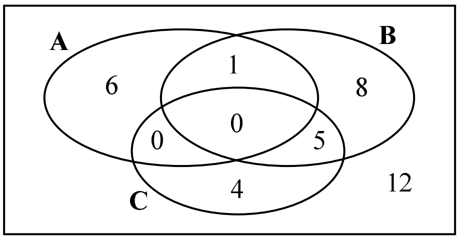
(ג) $$S_{203}{}^{(a)} = 16,443 \quad \Rightarrow \quad (2a_1 + 202d) \cdot \frac{203}{2} = 16,443$$

$$a_1 + 101d = 81$$

סכום האיברים שנמחקו:

$$S_{29}{}^{(b)} = (2b_1 + d_2 \cdot 28) \cdot \frac{29}{2} = (b_1 + 14d_2) \cdot 29 =$$
$$= (a_4 + 14 \cdot 7d) \cdot 29 = (a_1 + 3d + 98d) \cdot 29 =$$
$$= (a_1 + 101d) \cdot 29 = 81 \cdot 29 = 2,349$$

(3) נסרטט דיאגרמת וון:



(א) בסך הכול יש בכיתה:

36 תלמידים $= 6 + 8 + 4 + 1 + 5 + 12$.

(ב) (i)

$$P(\text{2 או 3 מגזינים}) = \frac{N(A \cap B) + N(A \cap C) + N(B \cap C) + N(A \cap B \cap C)}{N} =$$
$$= \frac{1 + 0 + 5 + 0}{36} = \frac{1}{6}$$

המשך בעמוד הבא >>>

$$P(A \cup B) = \frac{N(A) + N(B) - N(A \cap B)}{N} =$$ (*ii*)

$$= \frac{(6+1+0+0)+(1+8+5+0)-(1+0)}{36} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

$$P(A \cap C) = \frac{N(A \cap C)}{N} = \frac{0+0}{36} = 0$$ (*iii*)

ג) (*i*)
$$P(C / A \cup B \cup C) = \frac{9}{36-12} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

(*ii*)
$$P(B) = \frac{1+8+5+0}{24} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}$$

$$P(C) = \frac{5+4+0+0}{24} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

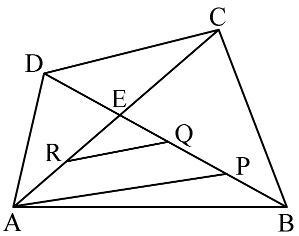
$$P(B \cap C) = \frac{5+0}{24} = \frac{5}{24}$$

$$P(B \cap C) \stackrel{?}{=} P(B) \cdot P(C) \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{24} \stackrel{?}{=} \frac{7}{12} \cdot \frac{3}{8} \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{24} \neq \frac{7}{32}$$

לכן המאורעות תלויים.

(4) נסמן: $CE = 3x$ ומכאן נקבל: $AC = 7x$.

$$AR = RE = \frac{AE}{2} = \frac{AC - CE}{2} = \frac{7x - 3x}{2} = 2x$$



נסמן: $DE = 4y$ ומכאן נקבל:

$BD = 9y$, $BE = BD - DE = 5y$,

$QE = PQ = BP = \frac{BE}{3} = \frac{5y}{3}$.

נסמן את שטח ΔERQ ב- S .

RQ הוא קטע אמצעים ב- ΔAEP , לכן: $S_{\Delta AEP} = 2^2 \cdot S = 4S$

ומכאן גם נקבל: $S_{APQR} = 4S - S = 3S$

השטחים של ΔAEP ו- ΔAEB בעלי גובה משותף, מתייחסים כמו הצלעות שאליהן יורד הגובה המשותף, לכן:

$$\frac{S_{\Delta AEP}}{S_{\Delta AEB}} = \frac{EP}{EB} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad S_{\Delta AEB} = \frac{3}{2} \cdot 4S = 6S$$

המשך בעמוד הבא >>>

באופן דומה:

$$\frac{S_{\Delta\,\text{ADE}}}{S_{\Delta\,\text{ABE}}}=\frac{\text{DE}}{\text{EB}}=\frac{4y}{5y}=\frac{4}{5}\quad\Rightarrow\quad S_{\Delta\,\text{ADE}}=\frac{4}{5}\cdot 6S=4.8S$$

$$\frac{S_{\Delta\text{CEB}}}{S_{\Delta\,\text{AEB}}}=\frac{\text{EC}}{\text{AE}}=\frac{3x}{4x}=\frac{3}{4}\quad\Rightarrow\quad S_{\Delta\text{CEB}}=\frac{3}{4}\cdot 6S=4.5S$$

$$\frac{S_{\Delta\text{CDE}}}{S_{\Delta\text{CEB}}}=\frac{\text{DE}}{\text{EB}}=\frac{4}{5}\quad\Rightarrow\quad S_{\Delta\text{CDE}}=\frac{4}{5}\cdot 4.5S=3.6S$$

ואז:

$$S_{\text{ABCD}}=S_{\Delta\,\text{AEB}}+S_{\Delta\,\text{ADE}}+S_{\Delta\text{CEB}}+S_{\Delta\text{CDE}}=$$
$$=6S+4.8S+4.5S+3.6S=18.9S$$

$$\frac{S_{\text{APQR}}}{S_{\text{ABCD}}}=\frac{3S}{18.9S}=\frac{10}{63}$$

(5) (א) **<u>שימו לב:</u>** נפלה טעות בסעיף זה. יש להוכיח שהמרובע OBMC הוא דלתון.

$\text{OB}=\text{OC}$ (רדיוסים במעגל שווים זה לזה)

$\text{MB}=\text{MC}$ (רדיוסים במעגל שווים זה לזה)

לכן OBMC הוא דלתון (מרובע בעל שני זוגות של צלעות סמוכות שוות).

(ב) BC הוא קוטר במעגל (במעגל, זווית היקפית בת 90° ($\measuredangle\text{BEC}$) נשענת על קוטר)

$\measuredangle\text{BDC}=90^\circ$ (נתון: BD גובה ב- $\Delta\,\text{ABC}$)

לכן: D היא נקודה על המעגל ש- BC הוא קוטרו

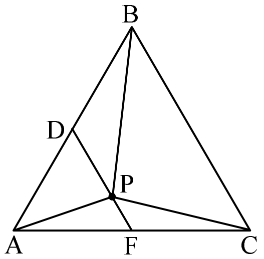
(זווית בת 90° הנשענת על קוטר היא זווית היקפית).

(ג) מרכז המעגל R שבסעיף (ב) נמצא באמצע הקוטר BC.

כמו כן, בדלתון OMBC האלכסון הראשי חוצה את האלכסון המשני

ולכן R נמצאת על הקטע OM, כלומר R, O ו- M נמצאות על ישר אחד.

(6) נסמן: $AB = BC = CA = a$.



נתון: $\frac{DP}{PF} = 2$, $AF = FC$, $AD = DB$,

$\sphericalangle PAC = \alpha$, $\sphericalangle PBA = \beta$ ו- $\sphericalangle PCA = \gamma$.

DF הוא קטע אמצעים ב- ΔABC ,

לכן: $AF = FC = AD = DB = \frac{a}{2}$, $DF = \frac{a}{2}$.

$$DP : PF = 2:1 \quad \Rightarrow \quad DP = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a}{3} \ , \ PF = \frac{a}{6}$$

לפי משפט הסינוסים ב- ΔAPF :

$$\frac{AF}{\sin \sphericalangle P} = \frac{PF}{\sin \sphericalangle A}$$

$$\frac{a}{2\sin[180^\circ - (\alpha + 60^\circ)]} = \frac{a}{6\sin\alpha} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2\sin(\alpha + 60^\circ)} = \frac{1}{6\sin\alpha}$$

$$6\sin\alpha = 2\sin(60^\circ + \alpha) \quad \Rightarrow \quad 6\sin\alpha = \sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha$$

$$5\sin\alpha = \sqrt{3}\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad tg\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

לפי משפט הסינוסים ב- ΔBDP :

$$\frac{DP}{\sin\beta} = \frac{BD}{\sin \sphericalangle P}$$

$$\frac{a}{3\sin\beta} = \frac{a}{2\sin(180^\circ - 120^\circ - \beta)} \quad \Rightarrow \quad 3\sin\beta = 2\sin(60^\circ - \beta)$$

$$3\sin\beta = \sqrt{3}\cos\beta - \sin\beta \quad \Rightarrow \quad 4\sin\beta = \sqrt{3}\cos\beta \quad \Rightarrow \quad tg\,\beta = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

לפי משפט הסינוסים ב- ΔPCF :

$$\frac{PF}{\sin \sphericalangle C} = \frac{FC}{\sin \sphericalangle P}$$

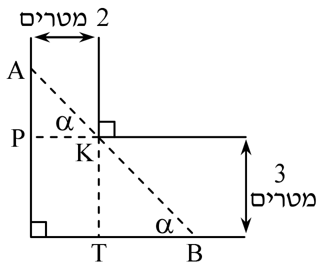
$$\frac{a}{6\sin\gamma} = \frac{a}{2\sin(180^\circ - 120^\circ - \gamma)} \quad \Rightarrow \quad 6\sin\gamma = 2\sin(60^\circ - \gamma)$$

$$6\sin\gamma = \sqrt{3}\cos\gamma - \sin\gamma \quad \Rightarrow \quad 7\sin\gamma = \sqrt{3}\cos\gamma \quad \Rightarrow \quad tg\,\gamma = \frac{\sqrt{3}}{7}$$

$$\frac{7\,tg\,\gamma + 5\,tg\,\alpha}{tg\,\beta} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = 2 \cdot 4 = 8$$

(7) אורך הסולם הוא:

$$AB = AK + KB$$



ב- ΔAPK : $AK = \frac{PK}{\cos\alpha}$

$AK = \frac{2}{\cos\alpha}$

ב- ΔKTB : $KB = \frac{KT}{\sin\alpha} = \frac{3}{\sin\alpha}$

פונקציית המטרה:

$$F = AB \quad\Rightarrow\quad F(\alpha) = \frac{2}{\cos\alpha} + \frac{3}{\sin\alpha}$$

$$F'(\alpha) = \frac{2\sin\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{3\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$$F'(\alpha) = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{2\sin^3\alpha - 3\cos^3\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = 0$$

$$2\sin^3\alpha - 3\cos^3\alpha = 0 \quad\Rightarrow\quad 2\sin^3\alpha = 3\cos^3\alpha$$

$\cos\alpha = 0$ אינו פתרון המשוואה, מכיוון שהסולם אינו עומד אנכית, לכן:

$$\tan^3\alpha = \frac{3}{2} \quad\Rightarrow\quad \tan\alpha \approx 1.145 \quad\Rightarrow\quad \alpha = 48.86^\circ$$

$AB = \frac{2}{\cos 48.86^\circ} + \frac{3}{\sin 48.86^\circ} =$ 7.023 מטרים

α	$\alpha = 0$	$0 < x < 48.86^\circ$	$\alpha = 48.86^\circ$	$48.86^\circ < \alpha < 90^\circ$	$\alpha = 90^\circ$
F'	נקודת אי- הגדרה	$-$	0	$+$	נקודת אי- הגדרה
F		↘	min	↗	

$$F'(30^\circ) = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} - \frac{3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{4}} < 0 \quad , \quad F'(60^\circ) = \frac{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{4}} - \frac{3\cdot\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} > 0$$

האורך המינימלי של הסולם שניתן להעביר דרך מפגש הפרוזדורים (K)
הוא: 7.023 מטרים.

הערה: אם אורך הסולם יהיה ארוך יותר מהאורך המינימלי,
הוא לא יוכל לעבור בין שני פרוזדורים.

(8) (א)

$$\begin{cases}(x^2+1)(\mathrm{a}-x^2)\ge 0\\ x^2+1>0\end{cases} \Rightarrow \mathrm{a}^2-x^2\ge 0$$

$$x^2\le \mathrm{a} \Rightarrow |x|\le\sqrt{\mathrm{a}} \Rightarrow 3=\sqrt{\mathrm{a}} \Rightarrow \mathrm{a}=9$$

(ב)

$$f'(x)=\frac{2x(9-x^2)-2x(x^2+1)}{2\sqrt{(x^2+1)(9-x^2)}}=\frac{x(8-2x^2)}{\sqrt{(x^2+1)(9-x^2)}}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{2x(4-x^2)}{\sqrt{(x^2+1)(9-x^2)}}=0 \Rightarrow 2x(4-x^2)=0$$

$$x=0 \Rightarrow y=3$$

$$x=2 \Rightarrow y=5$$

$$x=-2 \Rightarrow y=5$$

x	$x=-3$	$-3<x<-2$	$x=-2$	$-2<x<0$	$x=0$
f′(x)		+	0	−	0
f(x)	קצה min 0	↗	max	↘	min

x	$0<x<2$	$x=2$	$2<x<3$	$x=3$
f′(x)	+	0	−	
f(x)	↗	max	↘	קצה min 0

לפי שיטת האינטרוולים, נחליט מה הסימן של $f'(x)$:

$$f'(1)=\frac{2\cdot1\cdot3}{(+)}>0 \qquad f'(2.5)=\frac{5\cdot(4-2.5^2)}{(+)}<0$$

$$f'(-2.5)=\frac{-5\cdot(4-2.5^2)}{(+)}>0 \qquad f'(-1)=\frac{2\cdot(-1)\cdot3}{(+)}<0$$

תשובה: מינימום מקומי ומוחלט: $(-3,0)$, $(3,0)$,

מקסימום: $(-2,5)$, $(2,5)$, מינימום: $(0,3)$.

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(ג) לפי סעיף (ב), הפונקציה עולה כאשר: $2 < x < 0$, $-2 < x < -3 \le x$,

והפונקציה יורדת כאשר: $2 < x \le 3$, $-2 < x < 0$.

(ד) שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y :

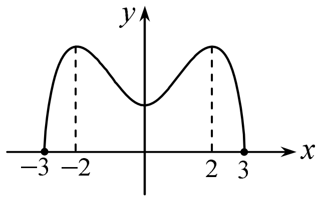
$$x=0 \;\Rightarrow\; y=3 \;\Rightarrow\; (0,3)$$

שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x :

$$y=0 \;\Rightarrow\; (x^2+1)(9-x^2)=0$$

$$9-x^2=0 \;\Rightarrow\; (3,0)\ ,\ (-3,0)$$

(ה) ראו סקיצה.



(ו)

$$g(x)=\frac{4x-x^3}{f(x)}$$

(i)

$$f'(x)=g(x) \;\Rightarrow\; \frac{2x\,(4-x^2)}{f(x)}=\frac{4x-x^3}{f(x)}$$

$$4x-x^3=0 \;\Rightarrow\; x(4-x^2)=0$$

$$x=0 \;\Rightarrow\; y=0 \;\Rightarrow\; (0,0)$$

$$x=2 \;\Rightarrow\; y=0 \;\Rightarrow\; (2,0)$$

$$x=-2 \;\Rightarrow\; y=0 \;\Rightarrow\; (-2,0)$$

(ii)

$$g(x)=\frac{4x-x^3}{f(x)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x\,(8-2x^2)}{f(x)}=\frac{1}{2}f'(x)$$

(iii)

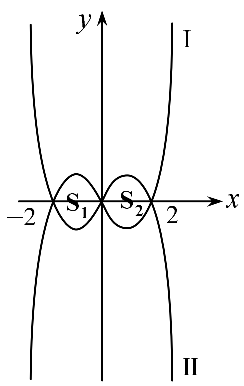
$$\mathrm{S}=\mathrm{S}_1+\mathrm{S}_2=$$

$$=\left|\int_{-2}^{0}\big(f'(x)-g(x)\big)\,dx\right|+\left|\int_{0}^{2}\big(f'(x)-g(x)\big)\,dx\right|=$$

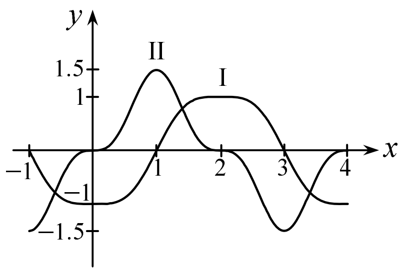
$$=\left|\int_{-2}^{0}\tfrac{1}{2}f'(x)\,dx\right|+\left|\int_{0}^{2}\tfrac{1}{2}f'(x)\,dx\right|=$$

$$=\tfrac{1}{2}\Big(\Big|\,f(x)\Big|_{-2}^{0}\,\Big|+\Big|\,f(x)\Big|_{0}^{2}\,\Big|\Big)=\tfrac{1}{2}\big(|3-5|+|5-3|\big)=$$

$=\tfrac{1}{2}(2+2)=$ 2 יחידות שטח



(9) (א) כאשר לגרף I יש נקודת קיצון,



גרף II חותך את ציר ה- x, כלומר,

הערך של פונקציה II הוא 0 .

כאשר גרף I עולה, גרף II חיובי.

כאשר גרף I יורד, גרף II שלילי.

כלומר, גרף II מתאר את גרף הנגזרת של פונקציה I .

כלומר גרף I מתאר את $f'(x)$ וגרף II מתאר את $f''(x)$.

(ב) (i) בנקודות הקיצון של $f(x)$, $f'(x)$ מחליפה את סימנה.

$f'(x)=0$ עבור $x=-1$, $x=1$, $x=3$, כלומר :

$x_{\text{max בקצה}}=-1$

$f''(1)>0 \;\Rightarrow\; x_{\min}=1$

$f''(3)<0 \;\Rightarrow\; x_{\max}=3$

$x_{\text{min בקצה}}=4$

(ii) בנקודת הפיתול של $f(x)$, $f''(x)=0$ ומחליפה את סימנה.

כלומר שיעורי ה- x של נקודות הפיתול הם : $x=0$, $x=2$

(iii) הפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מעלה ($\cup$)

כאשר $f''(x)>0$, בתחום : $0<x<2$.

הפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מטה ($\cap$)

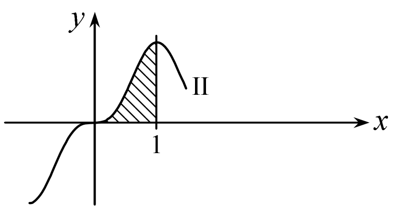
כאשר $f''(x)<0$, בתחומים : $2<x<4$, $-1<x<0$.

(ג)

$$S=\int_0^1 f''(x)\,dx=f'(x)\Big|_0^1=$$

$$=f'(1)-f'(0)=$$

$$=0-(-1)=1 \text{ יחידת שטח}$$



(ד)