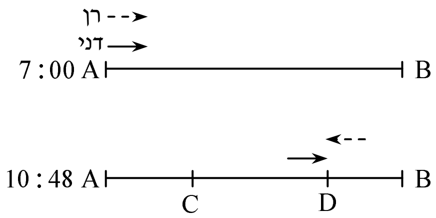
פתרון מבחן מס' 12 (ספר לימוד – שאלון 035806)

(1) נסמן ב- x קמ"ש את מהירות כל אחד מהרוכבים.



נסמן ב- C את הנקודה בה אירעה התקלה באופניו של דני.

בנקודה זו, המרחק שעברו הוא AC, והוא מהווה 80% מהמרחק שנותר להם.

נסמן את המרחק CB (המרחק שנותר להם) ב- m, ואז:

$$\mathrm{CB} = \mathrm{m} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{AC} = 0.8\mathrm{m}$$

נסמן ב- D את נקודת הפגישה של דני ורן, ואז: CD = 18 ק"מ

(א) $S = \mathrm{V} \cdot \mathrm{T}$

הדרך שעבר רן מתוארת על-ידי המשוואה ($\frac{4}{5}$ שעה = 48 דקות):

$$3\frac{4}{5} \cdot x = 0.8\mathrm{m} + \mathrm{m} + (\mathrm{m} - 18) \quad \Rightarrow \quad \frac{19x}{5} = 2.8\mathrm{m} - 18 \qquad ①$$

הדרך שעבר דני מתוארת על-ידי המשוואה ($\frac{2}{5}$ שעה = 24 דקות):

$$\left(3\frac{4}{5} - \frac{2}{5}\right) \cdot x = 0.8\mathrm{m} + 18 \quad \Rightarrow \quad \frac{17x}{5} = 0.8\mathrm{m} + 18 \qquad ②$$

נפתור את מערכת המשוואות ① ו- ②:

$$\begin{cases} 2.8\mathrm{m} - 18 = \frac{19x}{5} \\ 0.8\mathrm{m} + 18 = \frac{17x}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{m} = \dfrac{\frac{19}{5}x + 18}{2.8} \\ \mathrm{m} = \dfrac{\frac{17}{5}x - 18}{0.8} \end{cases} \Rightarrow \frac{\frac{19}{5}x + 18}{2.8} = \frac{\frac{17}{5}x - 18}{0.8} \quad / \cdot 5.6$$

$$\frac{38}{5}x + 36 = \frac{119}{5}x - 126 \quad \Rightarrow \quad \frac{81}{5}x = 162 \quad \Rightarrow \quad x = \text{10 קמ"ש}$$

מהירות רכיבתם של דני ורן היא 10 קמ"ש.

(ב) נציב $x = 10$ ב- ① ונקבל:

$$\frac{19 \cdot 10}{5} = 2.8\mathrm{m} - 18$$

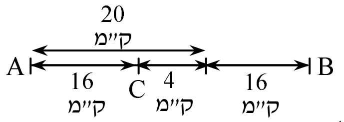
$$2.8\mathrm{m} = 56 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{m} = \text{20 ק"מ}$$

$$\mathrm{AB} = 1.8\mathrm{m} = 1.8 \cdot 20 = \text{36 ק"מ}$$

$$\mathrm{AC} = 0.8\mathrm{m} = 0.8 \cdot 20 = \text{16 ק"מ}$$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

© כל הזכויות שמורות להוצאת משבצת – (www.mishbetzet.co.il) – לספר לימוד לשאלון 035806



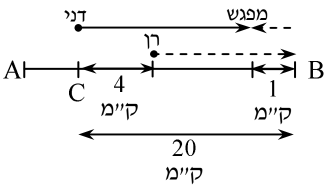
דני תיקן את התקלה במשך $\frac{2}{5}$ שעה.

בזמן הזה רן הספיק לעבור: $\frac{2}{5}\cdot 10 = $ 4 ק"מ ,

אז רן נמצא במרחק $16+4=$ 20 ק"מ מנקודה A .

כלומר, מרחקו עד לנקודה B היה $36-20=$ 16 ק"מ .

(ג) נסמן את מהירותו החדשה של דני:



$V_{\text{דני}} = y$

מהירותו של רן: $V_{\text{רן}} = 10$ קמ"ש

הזמן שחלף מהרגע בו דני ממשיך בנסיעה,

מנקודה C עד למפגש עם רן, הוא אותו זמן, כלומר: $T_{\text{דני}} = T_{\text{רן}}$

$$T=\frac{S}{V} \Rightarrow \frac{20-1}{y}=\frac{16+1}{10} \Rightarrow y=\frac{190}{17} \text{ קמ"ש}$$

(2) (א)

$$\begin{cases} a_3 = a_2 + 36 \\ a_4 = 9a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1q^2 - a_2q = 36 \\ a_1q^3 = 9a_1q \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1q(q-1)=36 \\ q^2 = 9 \Rightarrow q=\pm 3 \ , \ q>1 \Rightarrow q=3 \end{cases}$$

$$a_1\cdot 3\cdot 2 = 36 \Rightarrow a_1 = 6$$

(ב) $(iii)-(i)$

b_n היא סדרה הנדסית שבה האיבר הראשון הוא b_1

ומנתה Q . נוכיח כי הסדרה $\frac{a_n}{b_n}$ היא גם סדרה הנדסית.

$$\frac{\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}}{\frac{a_n}{b_n}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{q}{Q} = \frac{3}{Q} = \text{const}$$

לפי הנתון: $\frac{3}{Q}=6 \Rightarrow Q=\frac{1}{2}$

$$S_8 = 1{,}007{,}769 \Rightarrow \frac{a_1}{b_1}\cdot\frac{6^8-1}{6-1} = 1{,}007{,}769$$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

$$\frac{6}{b_1}\cdot\frac{1,679,615}{5}=1,007,769 \quad\Rightarrow\quad \frac{6}{b_1}=3 \quad\Rightarrow\quad b_1=2$$

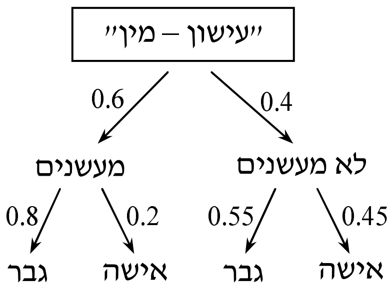
האיבר הראשון בסדרה החדשה: $\frac{a_1}{b_1}=\frac{6}{2}=3$.

(*iv*)

$$b_k=\frac{1}{2^{10}} \quad\Rightarrow\quad b_1\cdot Q^{k-1}=2^{-10}$$

$$2\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-1}=2^{-10} \quad\Rightarrow\quad 2^{2-k}=2^{-10} \quad\Rightarrow\quad 2-k=-10 \quad\Rightarrow\quad k=12$$

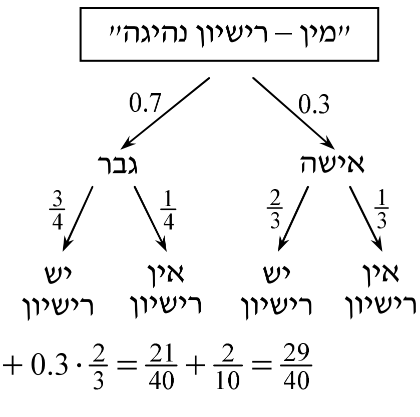
(3) (א) נבנה עץ הסתברויות "עישון – מין", לפי נתוני השאלה:



$$P(\text{גבר})=0.6\cdot0.8+0.4\cdot0.55=0.48+0.22=0.7$$

מכאן: $P(\text{אישה})=1-0.7=0.3$

כעת נבנה עץ הסתברויות "מין – רישיון נהיגה":

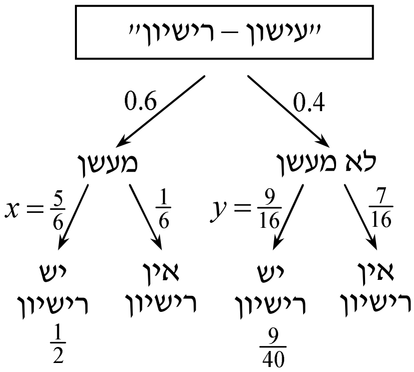


נקבל: $P(\text{רישיון})=0.7\cdot\frac{3}{4}+0.3\cdot\frac{2}{3}=\frac{21}{40}+\frac{2}{10}=\frac{29}{40}$

המשך בעמוד הבא >>>

© כל הזכויות שמורות להוצאת משבצת – (www.mishbetzet.co.il) – לספר לימוד לשאלון 035806

(ב) נבנה עץ הסתברויות "עישון – רישיון".



נסמן: $P(\text{יש רישיון / מעשן}) = x$

אז: $0.6x = 0.5$

$x = \frac{5}{6}$

$P(\text{אין רישיון / מעשן}) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$

$$P(\text{יש רישיון} \cap \text{לא מעשן}) = P(\text{יש רישיון}) - P(\text{יש רישיון} \cap \text{מעשן}) =$$
$$= \frac{29}{40} - \frac{1}{2} = \frac{9}{40}$$

נסמן: $P(\text{יש רישיון / לא מעשן}) = y$, אז:

$$0.4y = \frac{9}{40} \Rightarrow y = \frac{9}{16} \Rightarrow P(\text{אין רישיון / לא מעשן}) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

(i) $$P(\text{יש רישיון / לא מעשן}) = \frac{\frac{9}{40}}{0.4} = \frac{9}{16}$$

(ii) $$P(\text{לא מעשן / אין רישיון}) = \frac{0.4 \cdot \frac{7}{16}}{0.6 \cdot \frac{1}{6} + 0.4 \cdot \frac{7}{16}} = \frac{\frac{7}{40}}{\frac{11}{40}} = \frac{7}{11}$$

(4) (א) נסמן: $\measuredangle ACD = \alpha$ ואז $\measuredangle ABD = \alpha$

(זוויות היקפיות הנשענות על אותה הקשת שוות זו לזו).

$\measuredangle CAE = 90° - \alpha$ (סכום זוויות ב- ΔACE הוא $180°$).

$\Delta AEC \cong \Delta FEC$ לפי משפט חפיפה צ.ז.צ

($AE = EF$, $\measuredangle AEC = \measuredangle FEC = 90°$, EC צלע משותפת)

מכאן: $\measuredangle CFE = 90° - \alpha$ (זוויות מתאימות שוות במשולשים חופפים)

מכאן: $\measuredangle BFG = 90° - \alpha$ (זוויות קדקודיות שוות)

נקבל: $\measuredangle FGB = 90°$ (סכום זוויות ב- ΔFGB הוא $180°$)

לכן המרובע $FGDE$ הוא בר-חסימה במעגל

(מרובע שסכום הזוויות הנגדיות שלו שווה ל- $180°$)

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

© כל הזכויות שמורות להוצאת משבצת (www.mishbetzet.co.il) – לספר לימוד לשאלון **035806**

(ב) $\measuredangle ACE = \measuredangle FCE$ (זוויות מתאימות שוות במשולשים חופפים)

$\Downarrow$

$\measuredangle DCH = \alpha$

$\Downarrow$

$\measuredangle DBH = \alpha$ (זוויות היקפיות הנשענות על אותה הקשת שוות)

$\Downarrow$

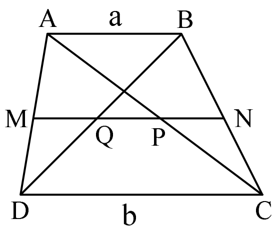
ΔBFH שווה-שוקיים (משולש בו גובה הוא גם חוצה-זווית)

$\Downarrow$

$FG = GH$ (במשולש שווה-שוקיים, גובה לבסיס הוא גם תיכון לבסיס)

(5) נתון: $AB = a\ ,\ DC = b$

צ"ל: $MN = ?$



$AB \parallel MN \parallel DC$

$\Downarrow$

$(*)\quad \frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$ לפי משפט תאלס.

$MQ \parallel AB$ נתון.

$\Downarrow$

$\frac{MQ}{AB} = \frac{DM}{DA}$ לפי משפט תאלס המורחב ב- ΔABD .

$NP \parallel AB$ נתון.

$\Downarrow$

$\frac{PN}{AB} = \frac{CN}{CB}$ לפי משפט תאלס המורחב ב- ΔABC .

לפי $(*)$: $\frac{DM}{DA} = \frac{CN}{CB} \Leftarrow \frac{MD}{MD+AM} = \frac{NC}{NC+BN} \Leftarrow \frac{MD}{AM} = \frac{NC}{BN}$

$\frac{MQ}{AB} = \frac{PN}{AB}$ שני גדלים השווים לגודל שלישי, שווים ביניהם.

$\Downarrow$

$QP = MQ = PN = x$ סימון.

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

© כל הזכויות שמורות להוצאת משבצת – (www.mishbetzet.co.il) – לספר לימוד לשאלון **035806**

נסמן: $\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}=\frac{m}{n}$

ב- ΔABD , $MQ \parallel AB$, אז: $\frac{x}{a}=\frac{n}{m+n}$

ב- ΔADC , $MP \parallel DC$, אז: $\frac{2x}{b}=\frac{m}{m+n}$

מחיבור אגפים מתאימים בשתי המשוואות נקבל:

$$\frac{x}{a}+\frac{2x}{b}=\frac{n}{m+n}+\frac{m}{m+n} \Rightarrow x\cdot\frac{b+2a}{ab}=\frac{n+m}{m+n}=1 \Rightarrow x=\frac{ab}{b+2a}$$

מחיבור הקטעים נקבל: $MN=MQ+QP+PN=3x=\frac{3ab}{b+2a}$

(6)

$$S_1=\tfrac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\measuredangle BAC$$

$$2S_1=a\cdot AC\cdot 1 \Rightarrow AC=\frac{2S_1}{a}$$

באופן דומה נקבל: $AD=\frac{2S_2}{b}$, ואז:

$$S_{\Delta ADC}=\tfrac{1}{2}AC\cdot AD\cdot\sin\alpha=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{2S_1}{a}\cdot\frac{2S_2}{b}\cdot\sin\alpha=\frac{2S_1S_2\sin\alpha}{ab}$$

מתקיים: $S_{\Delta ABE}=S_1+S_2-S_{\Delta ADC}$

לכן: $S_{\Delta ABE}=S_1+S_2-\frac{2S_1S_2\sin\alpha}{ab}\quad(*)$

בנוסף מתקיים: $S_{\Delta ABE}=\tfrac{1}{2}a\cdot b\cdot\sin\measuredangle BAE$

$$2S_{\Delta ABE}=ab\cdot\sin(180^\circ-\alpha) \Rightarrow ab=\frac{2S_{\Delta ABE}}{\sin\alpha}\quad(**)$$

נציב את $(**)$ ב- $(*)$ ונקבל: $S_{\Delta ABE}=S_1+S_2-\frac{2S_1S_2\sin\alpha}{\frac{2S_{\Delta ABE}}{\sin\alpha}}$

$$S_{\Delta ABE}=S_1+S_2-\frac{S_1S_2\sin^2\alpha}{S_{\Delta ABE}}$$

נסמן: $S_{\Delta ABE}=x$ ונקבל: $x^2=(S_1+S_2)x-S_1S_2\sin^2\alpha$

$$x^2-(S_1+S_2)x+S_1S_2\sin^2\alpha=0$$

המשך בעמוד הבא ➤➤➤

© כל הזכויות שמורות להוצאת משבצת (www.mishbetzet.co.il) – לספר לימוד לשאלון 035806

$$x_{1,2}=\frac{S_1+S_2\pm\sqrt{(S_1+S_2)^2-4S_1S_2\sin^2\alpha}}{2}=$$
$$=\tfrac{1}{2}\left[(S_1+S_2)\pm\sqrt{S_1{}^2+2S_1S_2+S_2{}^2-4S_1S_2\sin^2\alpha}\,\right]=$$
$$=\tfrac{1}{2}\left[(S_1+S_2)\pm\sqrt{S_1{}^2+S_2{}^2+2S_1S_2(1-2\sin^2\alpha)}\,\right]=$$
$$=\tfrac{1}{2}\left[(S_1+S_2)\pm\sqrt{S_1{}^2+S_2{}^2+2S_1S_2\cdot\cos 2\alpha}\,\right]$$

במקרה שבו $\alpha<45^\circ$, נקבל: $2\alpha<90^\circ \Rightarrow \cos 2\alpha>0$

ואז הביטוי מתחת לשורש גדול מ- $(S_1+S_2)^2$, לכן יש משמעות רק אם ניקח את הסימן $+$, כלומר:

$$S_{\Delta ABE}=\tfrac{1}{2}\left(S_1+S_2+\sqrt{S_1{}^2+S_2{}^2+2S_1S_2\cdot\cos 2\alpha}\right)$$

(7) (א) (i) תחום ההגדרה: $(x-4)^2\neq 0 \Rightarrow x-4\neq 0 \Rightarrow x\neq 4$

(ii) אסימפטוטה אנכית:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-4}{(x-4)^2}=\frac{16-4}{(\pm 0)^2}=\frac{12}{0^+}=+\infty \Rightarrow x=4$$

אסימפטוטה אופקית:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{(x-4)^2}=\lim\frac{1-\frac{4}{x^2}}{(1-\frac{4}{x})^2}=\frac{1-0}{(1-0)^2}=\frac{1}{1}=1 \Rightarrow y=1$$

(iii) נקודת החיתוך עם ציר ה- y :

$$x=0 \Rightarrow y=\frac{0-4}{(0-4)^2}=-\frac{1}{4} \Rightarrow \left(0,-\tfrac{1}{4}\right)$$

נקודות החיתוך עם ציר ה- x :

$$y=0 \Rightarrow \frac{x^2-4}{(x-4)^2}=0 \Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm 2$$

לכן שיעורי הנקודות הם: $(-2,0)$, $(2,0)$.

המשך בעמוד הבא ▶▶▶

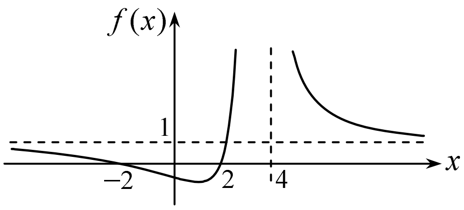
(iv)
$$y' = \frac{2x(x-4)^2 - 2(x-4)(x^2-4)}{(x-4)^4} = \frac{2(x^2-4x-x^2+4)}{(x-4)^3} =$$
$$= \frac{2(4-4x)}{(x-4)^3} = \frac{8(1-x)}{(x-4)^3}$$
$$y' = 0 \;\Rightarrow\; \frac{8(1-x)}{(x-4)^3} = 0 \;\Rightarrow\; 8(1-x) = 0$$
$$x = 1 \;,\; y = \frac{1-4}{(1-4)^2} = -\frac{1}{3} \;\Rightarrow\; \left(1, -\frac{1}{3}\right)$$

x	x < 1	x = 1	1 < x < 4	x = 4	x > 1
f′(x)	−	0	+	נקודת אי-הגדרה	−
f(x)	↘	min	↗		↘

$$f'(0) = \frac{8(1-0)}{(-)^3} < 0 \qquad f'(2) = \frac{8(1-2)}{(-)^3} > 0$$
$$f'(5) = \frac{8(1-5)}{(+)^3} < 0$$

מכאן, הנקודה $\left(1, -\frac{1}{3}\right)$ היא נקודת מינימום.

(ב) ראו סרטוט משמאל.



(ג) $g(x) = \sqrt{f(x)}$

(i) תחום הגדרה:

לפי סעיף (ב): $f(x) \ge 0 \;\Rightarrow\; x > 4 \;,\; 2 \le x < 4 \;,\; x \le -2$

(ii) לפי סעיף (ב): הנקודות $(\pm 2, 0)$ הן נקודות מינימום מוחלט (בקצה).

(iii)
$$g'(x) = \left[\sqrt{f(x)}\right]' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{f'(x)}{(+)}$$

פונקציה $g(x)$ עולה כאשר $f'(x) > 0$,

כלומר, כאשר הפונקציה $f(x)$ עולה ולא שלילית,

כלומר בתחום: $2 \le x < 4$.

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

© כל הזכויות שמורות להוצאת משבצת (www.mishbetzet.co.il) – לספר לימוד לשאלון 035806

פונקציה $g(x)$ יורדת כאשר $f'(x) < 0$,

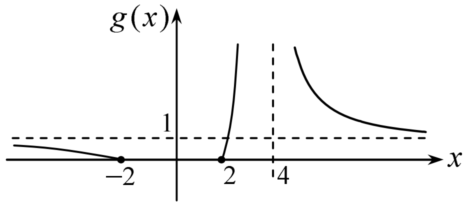
כלומר, כאשר הפונקציה $f(x)$ יורדת ולא שלילית,

כלומר, בתחומים: $x > 4$, $x \le -2$.

(*iv*) $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim\limits_{x\to\infty} f(x)} = \sqrt{1} = 1$

$g(x) = 0 \;\Rightarrow\; f(x) = 0$

$x = \pm 2 \;\Rightarrow\; (\pm 2, 0)$



(*v*) נתון: $S = 1.4548 = \int_2^3 f(x)\, dx$

$V = \pi \int_2^3 [g(x)]^2\, dx = \pi \int_2^3 f(x)\, dx =$

$= \pi \cdot 1.4548 =$ 1.4548π יחידות נפח

(8) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{a+1}{a} \cdot \cos^2 x - 2a$, $a > 0$ בתחום $0 \le x \le \pi$.

(א) $f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{a+1}{a} \cdot 2\cos x(-\sin x) = 0$

$\frac{a+1}{a} \cdot (-2\sin x \cos x) = 0$

$-\sin 2x = 0 \;\Rightarrow\; \sin 2x = 0 \;\Rightarrow\; 2x = \pi n \;\Rightarrow\; x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$

בתחום הנתון: $x = 0$, $y = \frac{a+1}{a} - 2a$

$x = \frac{\pi}{2}$, $y = -2a$

$x = 2\pi$, $y = \frac{a+1}{a} - 2a$

המשך בעמוד הבא >>>

x	x = 0	$0<x<\frac{\pi}{2}$	$x=\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}<x<\pi$	$x=\pi$
f′(x)	0	−	0	+	0
f(x)	max קצה	↘	min	↗	max קצה

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=(-)\sin\frac{\pi}{2}<0 \quad , \quad f'\left(\frac{3\pi}{4}\right)=(-)\sin\frac{3\pi}{2}>0$

נקודות מקסימום בקצה: $\left(0\,,\,\frac{a+1}{a}-2a\right)$, $\left(\pi\,,\,\frac{a+1}{a}-2a\right)$.

נקודת מינימום: $\left(\frac{\pi}{2}\,,\,-2a\right)$.

ב) $f''(x)=0 \;\Rightarrow\; \left(-\frac{a+1}{a}\sin 2x\right)'=0 \;\Rightarrow\; -\frac{a+1}{a}\cdot 2\cos 2x=0$

$\cos 2x=0 \;\Rightarrow\; 2x=\frac{\pi}{2}+\pi n \;\Rightarrow\; x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2} \;,\; n\in z$

בתחום הנתון: $x=\frac{\pi}{4} \;\Rightarrow\; y=\frac{a+1}{a}\cdot\frac{1}{2}-2a=\frac{a+1}{2a}-2a$

$x=\frac{3\pi}{4} \;\Rightarrow\; y=\frac{a+1}{2a}-2a$

x	x = 0	$0<x<\frac{\pi}{4}$	$x=\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}$
f″(x)		−	0	+
f(x)		∩	פיתול	∪

x	$x=\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}<x<\pi$	$x=\pi$
f″(x)	0	−	
x	פיתול	∩	

$f''\left(\frac{\pi}{8}\right)=(-)\cos\frac{\pi}{4}<0 \qquad f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=(-)\cos\pi>0$

$f''\left(\frac{7\pi}{8}\right)=(-)\cos\frac{7\pi}{4}<0$

כלומר שיעורי נקודות הפיתול: $\left(\frac{3\pi}{4}\,,\,\frac{a+1}{2a}-2a\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}\,,\,\frac{a+1}{2a}-2a\right)$.

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

© כל הזכויות שמורות להוצאת משבצת (www.mishbetzet.co.il) – לספר לימוד לשאלון 035806

הפונקציה קעורה כלפי מעלה עבור $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$.

הפונקציה קעורה כלפי מטה עבור $\frac{3\pi}{4} < x < \pi$, $0 < x < \frac{\pi}{4}$.

(ג) בעצם יש למצוא לאילו ערכי a , למשוואה $\frac{a+1}{a}\cos^2 x - 2a = 0$

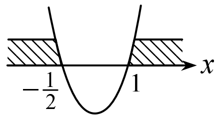
אין פתרון $(a > 0)$.

מהמשוואה הנ"ל נקבל את המשוואה: $\cos^2 x = \frac{2a^2}{a+1}$

למשוואה זו אין פתרון כאשר: $\frac{2a^2}{a+1} < 0$ וכאשר: $\frac{2a^2}{a+1} > 1$.

המקרה הראשון לא מתקיים כי: $a+1 > 0$, $a^2 > 0$

כלומר: $\frac{2a^2}{a+1} > 0$ לכל $a > 0$. במקרה השני:



$$\frac{2a^2}{a+1} > 1 \ , \ a > 0 \quad \Rightarrow \quad 2a^2 > a+1$$

$$2a^2 - a - 1 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 1 \ , \ a_2 = -\frac{1}{2}$$

$$a < -\frac{1}{2} \ , \ a > 1 \ , \ a > 0 \quad \Rightarrow \quad a > 1$$

כלומר, עבור הערכים $a > 1$ גרף הפונקציה אינו חותך את ציר ה- x .

(ד) עבור $a > 1$ (אין חיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x):

הגרף כולו נמצא מעל ציר ה- x או כולו מתחת לציר ה- x .

<u>דרך I :</u>

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{a+1}{a}\cos^2 x - 2a \right) dx \right| = \frac{13\pi}{8}$$

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{a+1}{a} \cdot \frac{1+\cos 2x}{2} - 2a \right) dx \right| = \frac{13\pi}{8}$$

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{a+1}{2a} + \frac{a+1}{2a}\cos 2x - 2a \right) dx \right| = \frac{13\pi}{8}$$

המשך בעמוד הבא ⮜⮜⮜

© כל הזכויות שמורות להוצאת משבצת – (www.mishbetzet.co.il) – לספר לימוד לשאלון **035806**

$$\left|\left[\left(\frac{a+1}{2a}-2a\right)x+\frac{a+1}{4a}\sin 2x\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right|=\frac{13\pi}{8}$$

$$\left(\frac{a+1}{2a}-2a\right)\left(\frac{\pi}{2}-0\right)+\frac{a+1}{4a}(0-0)=\frac{13\pi}{8}$$

$$\left|\frac{a+1-4a^2}{2a}\cdot\frac{\pi}{2}\right|=\frac{13\pi}{8} \quad\Rightarrow\quad \left|\frac{a+1-4a^2}{a}\right|=\frac{13}{2}$$

$$\frac{a+1-4a^2}{a}=\pm\frac{13}{2}$$

$$\frac{a+1-4a^2}{a}=\frac{13}{2} \quad\Rightarrow\quad 2a+2-8a^2=13a \quad\Rightarrow\quad 8a^2+11a-2=0$$

$$a_{1,2}=\frac{-11\pm\sqrt{185}}{16} \quad\Rightarrow\quad a_1\approx 0.16\ ,\ a_2<0$$

שני הפתרונות לא מתאימים כי נתון ש- $a>1$.

$$\frac{a+1-4a^2}{a}=-\frac{13}{2} \quad\Rightarrow\quad 2a+2-8a^2=-13a$$

$$8a^2-15a-2=0 \quad\Rightarrow\quad a_{3,4}=\frac{15\pm17}{16} \quad\Rightarrow\quad a_3=2\ ,\ a_4<0$$

כלומר הפתרון הוא: $a=2$.

<u>דרך II :</u>

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{a+1}{a}\cdot 0-2a\ ,\ a>0$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2a<0$$

כלומר, הגרף כולו נמצא מתחת לציר ה- x ולכן:

$$\frac{13\pi}{8}=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{a+1}{a}\cos^2 x-2a\right)dx$$

פותרים בדומה לדרך I ומקבלים:

$$\frac{13}{2}=-\left(\frac{a+1-4a^2}{a}\right) \quad\Rightarrow\quad a=2\ ,\ a=-\frac{1}{8}$$

$a>0$ לכן הפתרון הוא $a=2$.

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

© כל הזכויות שמורות להוצאת משבצת (www.mishbetzet.co.il) – לספר לימוד לשאלון **035806**

(ה) $a = 2 > 1$

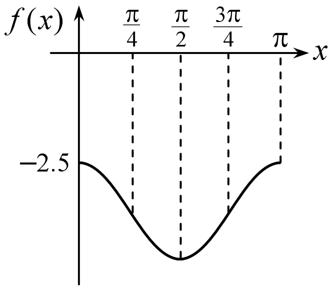
כלומר אין נקודת חיתוך לגרף הפונקציה

עם ציר ה- x .

לפי דרך II הגרף כולו נמצא מתחת לציר ה- x .

בסעיפים (א) ו- (ב) מצאנו את נקודות הקיצון

ואת נקודות הפיתול.



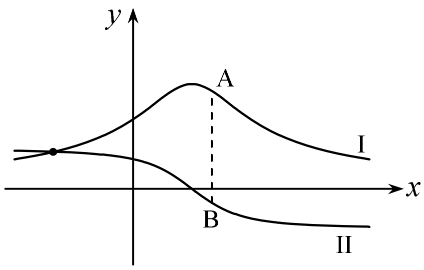
$$f(0) = \frac{2+1}{2} - 2\cdot 2 = -\frac{5}{2}$$

$$f(\pi) = \frac{2+1}{2} - 2\cdot 2 = -\frac{5}{2}$$

(9)

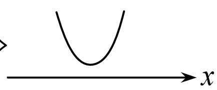
$$f(x) = \frac{6-2x}{\sqrt{x^2-6x+16}}$$

$$g(x) = \frac{14}{\sqrt{x^2-6x+16}}$$



(א) תחום ההגדרה של שתי הפונקציות: $x^2 - 6x + 16 > 0$

תחום ההגדרה: כל x $\Leftarrow$ $\Delta = 36 - 64 < 0 \Rightarrow$



גרף הפונקציה $g(x)$ אינו חותך את ציר ה- x ($14 \neq 0$ לכל x).

לכן, גרף I שייך ל- $g(x)$.

גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- x כאשר:

$$6 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3$$

כלומר בנקודה: $(3,0)$. לכן, גרף II מתאים ל- $f(x)$.

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(ב) בנקודת החיתוך של שני הגרפים מתקיים: $f(x)=g(x)$

$$\frac{6-2x}{\sqrt{x^2-6x+16}}=\frac{14}{\sqrt{x^2-6x+16}}$$

$$6-2x=14 \quad\Rightarrow\quad x=-4\ ,\ y=\frac{14}{\sqrt{16+24+16}}=\frac{14}{\sqrt{56}}=\frac{\sqrt{14}}{2}$$

שיעורי נקודת החיתוך של שני הגרפים הם: $\left(-4,\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$.

(ג) AB מקביל לציר ה- y, לכן, נסמן: $x_A=x_B=t$.

$$A\left(t\ ,\ \frac{14}{\sqrt{t^2-6t+16}}\right)\ ,\ B\left(t\ ,\ \frac{6-2t}{\sqrt{t^2-6t+16}}\right)$$

פונקציית המטרה: $F=AB=y_A-y_B$

$$F(t)=\frac{14}{\sqrt{t^2-6t+16}}-\frac{6-2t}{\sqrt{t^2-6t+16}}=\frac{8+2t}{\sqrt{t^2-6t+16}}$$

$$F'(t)=\frac{2\sqrt{t^2-6t+16}-\frac{(2t-6)(8+2t)}{2\sqrt{t^2-6t+16}}}{t^2-6t+16}=\frac{2(t^2-6t+16)-(t-3)(8+2t)}{(t^2-6t+16)\sqrt{t^2-6t+16}}=$$

$$=\frac{2(28-7t)}{(t^2-6t+16)\sqrt{t^2-6t+16}}$$

$$F'(t)=0 \quad\Rightarrow\quad 2(28-7t)=0 \quad\Rightarrow\quad t=4$$

המכנה חיובי לכל ערך של t.

עבור $t=4$, שיעורי הנקודות: $A\left(4,\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)\ ,\ B\left(4,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

t	t < 4	t = 4	
F′	+	0	−
F = AB	↗	max	↘

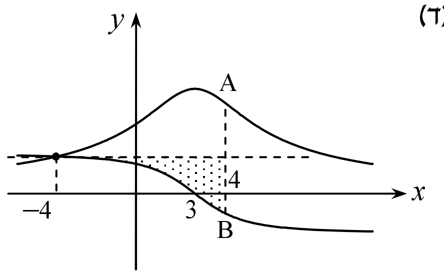
$$F'(3)=\frac{2\cdot 7}{+}>0 \qquad\qquad F'(5)=\frac{2\cdot(-7)}{+}<0$$

עבור נקודות אלה האורך AB הוא מקסימלי.

המשך בעמוד הבא >>>

© כל הזכויות שמורות להוצאת משבצת (www.mishbetzet.co.il) – לספר לימוד לשאלון 035806

ד)



$$\int f(x)\,dx = \int \frac{6-2x}{\sqrt{x^2-6x+16}}\,dx$$

$$\sqrt{x^2-6x+16} = \mathrm{t}$$

$$d\mathrm{t} = \frac{2x-6}{2\sqrt{x^2-6x+16}}$$

$$\frac{6-2x}{\sqrt{x^2-6x+16}} = -2\mathrm{dt}$$

$$\int \frac{6-2x}{\sqrt{x^2-6x+16}}\,dx = \int (-2)\,\mathrm{dt} = -2\mathrm{t} + \mathrm{c} =$$

$$= -2\sqrt{x^2-6x+16} + \mathrm{c}$$

$$S = \int_{-4}^{4}\left[\frac{\sqrt{14}}{2} - f(x)\right]dx = \left(\frac{\sqrt{14}}{2}x + 2\sqrt{x^2-6x+16}\right)\Bigg|_{-4}^{4} =$$

$$= 2\sqrt{14} + 2\sqrt{16-24+16} - \left(-2\sqrt{14} + 2\sqrt{16+24+16}\right) =$$

$$= 2\sqrt{14} + 2\sqrt{8} + 2\sqrt{14} - 2\sqrt{56} =$$

$$= 4\sqrt{14} + 2\sqrt{8} - 2\sqrt{4\cdot 14} =$$

$= 4\sqrt{14} + 2\sqrt{4\cdot 2} - 4\sqrt{14} =$ יחידות שטח $4\sqrt{2}$

© כל הזכויות שמורות להוצאת משבצת – (www.mishbetzet.co.il) – לספר לימוד לשאלון **035806**

גבי יקואל

משבצת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

◈ לכל הכיתות ◈ לכל השאלונים ◈ לכל הרמות