פתרון מבחן מס' 11 (ספר לימוד – שאלון 035806)

(1) (א) זמן הנסיעה מ-A ל- B הוא: $T_{AB} = \frac{90}{V}$ שעות

זמן הנסיעה מ- B ל- A הוא: $T_{BA} = \left(1.5 + 2.5 + \frac{90 - 1.5V}{V + 5}\right)$ שעות

לפי הנתון: $T_{BA} \le T_{AB} \quad \Rightarrow \quad 4 + \frac{90 - 1.5V}{V + 5} \le \frac{90}{V}$

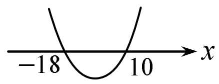
נפתור את אי-השוויון על-ידי מכפלת שני האגפים ב- $V(V+5)$

$(V > 0)$ ונקבל: $4V^2 + 20V + 90V - 1.5V^2 \le 90V + 450$

$2.5V^2 + 20V - 450 \le 0 \quad \Rightarrow \quad V^2 + 8V - 180 \le 0$

$V^2 + 8V - 180 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{1,2} = -4 \pm 14$

$V_1 = 10 \ , \ V_2 = -18 \quad \Rightarrow$



$-18 \le V \le 10$

$V > 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < V \le 10$

(ב) $\frac{9}{8} \cdot T_{BA} = T_{AB} \quad \Rightarrow \quad \frac{9}{8} \cdot \left(4 + \frac{90 - 1.5V}{V + 5}\right) = \frac{90}{V} \quad / \cdot \frac{8}{9}$

$\frac{2.5V + 110}{V + 5} = \frac{80}{V} \quad \Rightarrow \quad 2.5V^2 + 110V = 80V + 400 \quad / : 2.5$

$V^2 + 12V - 160 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{1,2} = -6 \pm 14$

$V_1 = 8 \ , \ V_2 - 20$

מהירות לא יכולה להיות שלילית, לכן: $V = 8$ קמ"ש

(2) (א)

$$a_3 + a_7 + a_{18} + a_{20} = 248$$

$$a_1 + 2d + a_1 + 6d + a_1 + 17d + a_1 + 19d = 248$$

$$4a_1 + 44d = 248 \quad \Rightarrow \quad a_1 + 11d = 62$$

$$S_{23} = (2a_1 + 22d) \cdot \frac{23}{2} = (a_1 + 11d) \cdot 23 = 62 \cdot 23 = 1,426$$

(ב) (i)

$$a_n = \sqrt{b} \cdot n + b - 23$$

$$a_1 = \sqrt{b} + b - 23$$

$$a_2 = 2\sqrt{b} + b - 23$$

$$d = a_2 - a_1 = \sqrt{b}$$

לפי סעיף (א) , $a_1 + 11d = 62$, מכאן :

$$\sqrt{b} + b - 23 + 11\sqrt{b} = 62 \quad \Rightarrow \quad b + 12\sqrt{b} - 85 = 0$$

$$(\sqrt{b})^2 + 12\sqrt{b} - 85 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\sqrt{b})_{1,2} = -6 \pm 11$$

$$(\sqrt{b})_1 = 5 \ , \ (\sqrt{b})_2 = -17$$

הפתרון $(\sqrt{b})_2 = -17$ נפסל כי $\sqrt{b}$ הוא מספר אי-שלילי.

$$\sqrt{b} = 5 \quad \Rightarrow \quad b = 25$$

(ii)

$$a_n = 5n + 25 - 23 = 5n + 2$$

$$a_1 = 5 \cdot 1 + 2 = 7 \ , \ d = \sqrt{25} = 5$$

$$\frac{S_{13}^{\text{אחרונים}}}{S_{23}} = \frac{S_{36} - S_{23}}{S_{23}} = \frac{(2a_1 + 35d) \cdot \frac{36}{2} - 1,426}{1,426} =$$

$$= \frac{(2 \cdot 7 + 35 \cdot 5) \cdot 18 - 1,426}{1,426} = \frac{1,976}{1,426} = \frac{988}{713}$$

(3) בקובייה הירוקה, ההסתברות לקבלת מספר מסוים (n) היא: $P_{\text{ירוקה}}(n)=\frac{1}{6}$

בקובייה הכחולה: $P_{\text{כחולה}}(1)=P_{\text{כחולה}}(2)=P_{\text{כחולה}}(3)=P_{\text{כחולה}}(5)=0.2$

$P_{\text{כחולה}}(4)=P_{\text{כחולה}}(6)=0.1$

(א) $P_{\text{כחולה}}(2,4,6)=0.2+0.1+0.1=0.4$

(ב) (i) בשתי הטלות מתוך 5 יתקבל מספר המתחלק ב- 2 :

$$P_{\text{כחולה}}(2,4,6-\text{ב2 מתוך 5})=\binom{5}{2}\left[P_{\text{כחולה}}(2,4,6)\right]^2\left[1-P(2,4,6)\right]^3=$$

$$2,4,6-\text{ב2 מתוך 5}\quad=\frac{5!}{2!\,3!}\cdot 0.4^2\cdot(1-0.4)^3=$$

$$=10\cdot 0.16\cdot 0.216=0.3456$$

(ii) רק בהטלה הראשונה ובהטלה האחרונה יתקבל מספר המתחלק ב- 2:

$$P=P(2,4,6)\cdot\left[1-P(2,4,6)\right]^3\cdot P(2,4,6)=$$

$$=0.4\cdot 0.6^3\cdot 0.4=0.03456$$

(ג) (i)

$$P=P_{\text{כ}}(1)\cdot P_{\text{י}}(5)+P_{\text{כ}}(2)\cdot P_{\text{י}}(4)+P_{\text{כ}}(3)\cdot P_{\text{י}}(3)+$$

$$+P_{\text{כ}}(4)\cdot P_{\text{י}}(2)+P_{\text{כ}}(5)\cdot P_{\text{י}}(1)=$$

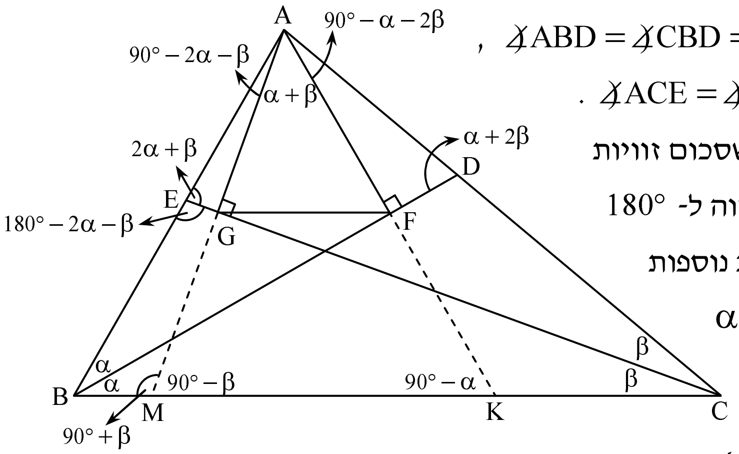
$$=0.2\cdot\frac{1}{6}+0.2\cdot\frac{1}{6}+0.2\cdot\frac{1}{6}+0.1\cdot\frac{1}{6}+0.2\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\cdot 0.9=0.15$$

(ii)

$$P(\text{לפחות באחת מספר זוגי}\,/\,\text{סכום } 6)=\frac{P_{\text{כ}}(2)\cdot P_{\text{י}}(4)+P_{\text{כ}}(4)\cdot P_{\text{י}}(2)}{0.15}=$$

$$=\frac{\frac{1}{6}(0.2+0.1)}{0.15}=\frac{1}{3}$$

(4) (א) + (ב)(ii)



נסמן : $\measuredangle ABD = \measuredangle CBD = \alpha$,

. $\measuredangle ACE = \measuredangle BCE = \beta$

ניעזר בכך שסכום זוויות

במשולש שווה ל- $180°$

ונביע זוויות נוספות

באמצעות α

ו- β

(ראו סרטוט).

נקבל : $\measuredangle MAC = \measuredangle AMC = 90° - \beta$, לכן ΔCAM הוא משולש שווה-שוקיים (מול זוויות שוות במשולש מונחות צלעות שוות).

מכאן : $CA = CM$ (מ.ש.ל (ב)(ii)).

באופן דומה, נקבל : $BA = BK$.

ב- ΔCAM : CG הוא גובה לבסיס ולכן הוא גם תיכון לבסיס,

כלומר : $AG = GM$.

באופן דומה ב- ΔBAK : BF הוא גובה לבסיס ולכן הוא גם תיכון לבסיס,

כלומר : $AF = FK$.

מכאן נקבל : $\frac{AF}{FK} = \frac{AG}{GM}$ ולכן $GF \parallel MK$ (לפי משפט הפוך לתאלס),

וגם $GF \parallel BC$ (מ.ש.ל (א)).

(ב) (i) נתון : $\measuredangle ACB = 40°$, כלומר : $2\beta = 40° \Rightarrow \beta = 20°$

נתון : $AF = \frac{1}{2}AB$ מכאן :

$$2AF = AB \Rightarrow AK = AB \Rightarrow \measuredangle B = \measuredangle AKB$$

כלומר : $2\alpha = 90° - \alpha \Rightarrow \alpha = 30°$

ואז נקבל שזוויות ΔABK הן בנות $60°$

ולכן ΔABK הוא משולש שווה-צלעות.

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(ב) (iii) $\measuredangle AKM = 90° - \alpha = 60°$

$\measuredangle FGM = \measuredangle FGC + \measuredangle CGM$

$\measuredangle FGC = \measuredangle GCM = \beta$ (זוויות מתחלפות שוות בין ישרים מקבילים)

ולכן: $\measuredangle FGM = \beta + 90° = 20° + 90° = 110°$

מכיוון שסכום זוויות נגדיות במרובע GFKM שונה מ- $180°$

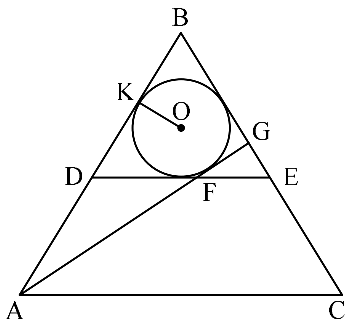
($60° + 110° \neq 180°$), הרי שהמרובע אינו בר-חסימה במעגל.

(5) שאלות המשלבות גיאומטריה + טריגונומטריה הורדו מתוכנית הלימודים.

(6) $AB = BC = CA$

$BD = DA$, $BE = EC$

$\measuredangle BAG = 2\alpha$



(א) $\measuredangle B = 60°$ במשולש שווה-צלעות כל אחת מהזוויות היא בת $60°$.

$\measuredangle DBO = \measuredangle EBO = 30°$ קטע המחבר נקודה ממנה יוצאים שני משיקים למעגל, עם מרכז המעגל, חוצה את הזווית בין המשיקים.

$\measuredangle BDO = \measuredangle EDO = 30°$ כנ"ל.

$\Downarrow$

$\measuredangle DBO = \measuredangle BDO = 30°$

$OK \perp BD$ רדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה.

$\Downarrow$

OK הוא גובה לבסיס ב- ΔBDO

$\Downarrow$

המשך בעמוד הבא ➤➤➤

$BK = KD$ גובה לבסיס במשולש שווה-שוקיים הוא גם תיכון לבסיס.

נסמן: $AB = BC = AC = a$

אז: $BD = DA = \frac{a}{2}$

$BK = KD = \frac{a}{4}$

ב- ΔBOK: $\tan\measuredangle KBO = \frac{OK}{KB} \quad \Rightarrow \quad OK = \tan 30^\circ \cdot \frac{a}{4}$

ב- ΔAKO: $\tan\measuredangle KAO = \frac{OK}{KA} \quad \Rightarrow \quad \tan\alpha = \frac{\frac{a}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{a}{2}+\frac{a}{4}}$

$$\tan\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{12}\cdot\frac{4}{3a} = \frac{\sqrt{3}}{9} \quad \Rightarrow \quad 1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = 1+\frac{3}{81} = \frac{28}{27}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{27}{28}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\tan\alpha\cdot\cos^2\alpha = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{9}\cdot\frac{27}{28} = \frac{3\sqrt{3}}{14}$$

מ.ש.ל. (א).

(ב) לפי משפט הסינוסים ב- ΔADF:

$$\frac{DF}{\sin\measuredangle DAF} = \frac{AD}{\sin\measuredangle DFA}$$

$$\frac{DF}{\sin 2\alpha} = \frac{\frac{a}{2}}{\sin(60^\circ - 2\alpha)}$$

$$DF = \frac{3\sqrt{3}}{14}\cdot\frac{a}{2\,(\sin 60^\circ\cos 2\alpha - \sin 2\alpha\cos 60^\circ)} \quad (*)$$

$$\sin 2\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{14}$$

$$\cos 2\alpha = \sqrt{1-\sin^2 2\alpha} = \sqrt{1-\frac{27}{196}} = \frac{\sqrt{169}}{14} = \frac{13}{14}$$

נציב ב- $(*)$ ונקבל:

$$DF = \frac{3\sqrt{3}}{14}\cdot\frac{a}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{13}{14} - \frac{3\sqrt{3}}{14}\cdot\frac{1}{2}\right)} = \frac{3\sqrt{3}\,a}{10\sqrt{3}} = \frac{3}{10}\cdot a$$

$$FE = DE - DF = \frac{a}{2} - \frac{3a}{10} = \frac{2a}{10} \quad \Rightarrow \quad DF : FE = \frac{3a}{10} : \frac{2a}{10} = 3:2$$

(7) (א)

$$f''(x)=0 \quad\Rightarrow\quad x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+72}}{12}$$

$$6x^2-3x-3=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=1\ ,\ x_2=-\tfrac{1}{2}$$

בנקודות אלה הנגזרת השנייה מתאפסת ומשנה סימן,

כלומר בנקודות אלה לנגזרת הראשונה יש נקודות קיצון.

$$x=1\ ,\ x=-\tfrac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad \left|x_{\text{שלילי}}\right|<\left|x_{\text{חיובי}}\right|$$

לכן גרף I וגרף II אינם מתאימים.

ב- $x=-\frac{1}{2}$ הפונקציה $f''(x)$ עוברת מחיובי לשלילי ולכן $f'(x)$

עוברת מעלייה לירידה, ולכן ב- $x=-\frac{1}{2}$ לפונקציה $f'(x)$ יש מקסימום.

ב- $x=1$ הפונקציה $f''(x)$ עוברת משלילי לחיובי ולכן $f'(x)$

עוברת מירידה לעלייה, ולכן ב- $x=1$ לפונקציה $f'(x)$ יש מינימום,

לכן גרף IV הוא הגרף המתאר את הפונקציה $f'(x)$.

(ב) (i) לפי תחומי החיוביות והשליליות של $f''(x)$:

הפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מעלה כאשר $x>1$, $x<-\frac{1}{2}$,

הפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מטה כאשר $-\frac{1}{2}<x<1$.

(ii) לפונקציה $f(x)$ יש נקודות קיצון כאשר $f'(x)=0$

והפונקציה $f'(x)$ משנה את סימנה.

לפי גרף IV :

$$\begin{cases} \mathrm{c}<x_{\text{קיצון}}<\mathrm{d} \\ x_{\text{קיצון}}>0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} -\frac{1}{2}<x_{\text{קיצון}}<1 \\ x_{\text{קיצון}}>0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad 0<x_{\text{קיצון}}<1$$

(iii) ראו פתרון בספר, עמוד **1,735** .

(ג)

$$S_1=\int_{-2}^{-1} f'''(x)\,dx=[f''(x)]\Big|_{-2}^{-1}=f''(-1)-f''(-2)=$$

$$=\frac{6+3-3}{\sqrt{(1+1)^5}}-\frac{24+6-3}{\sqrt{(4+1)^5}}=\frac{6}{\sqrt{32}}-\frac{27}{\sqrt{3{,}125}}\approx 0.5777 \text{ יחידות שטח}$$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

$$S_2=-\int_{-1}^{0} f'''(x)\,dx=[-f''(x)]\Big|_{-1}^{0}=f''(-1)-f''(0)=$$

$$=\frac{6}{\sqrt{32}}-\frac{-3}{1}\approx 4.0607 \text{ יחידות שטח}$$

$$S=0.5777+4.0607\approx 4.6384 \text{ יחידות שטח}$$

(8) (א) תחום הגדרה:

$$\sin x\neq 0 \quad\Rightarrow\quad x\neq \pi \mathrm{n}\ ,\ \mathrm{n}\in\mathbb{Z} \quad\Rightarrow\quad x\neq 0\ ,\ \pm\pi\ ,\ \pm 2\pi\ldots$$

התחום הוא סימטרי סביב ציר ה- y . נבדוק את זוגיות הפונקציה:

$$f(-x)=\frac{1}{\sin(-x)}=\frac{1}{-\sin x}=-f(x)$$

הפונקציה היא אי-זוגית.

(ב) (i) תחום הגדרה: $0<x<\pi\ ,\ \pi<x<2\pi$.

משוואות אסימפטוטות אנכיות: $x=0\ ,\ x=\pi\ ,\ x=2\pi$

(ii)

$$f''(x)=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

$$f''(x)=0 \quad\Rightarrow\quad -\frac{\cos x}{\sin^2 x}=0 \quad\Rightarrow\quad \cos x=0$$

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi\mathrm{k}\ ,\ \mathrm{k}\in\mathbb{Z}$$

בתחום הנתון:

$$x=\frac{\pi}{2} \quad\Rightarrow\quad y=\frac{1}{1}=1 \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{\pi}{2},1\right)$$

$$x=\frac{3\pi}{2} \quad\Rightarrow\quad y=\frac{1}{-1}=-1 \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{3\pi}{2},-1\right)$$

המשך בעמוד הבא ➤➤➤

x	$0<x<\frac{\pi}{2}$	$x=\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}<x<\pi$	$x=\pi$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	תחום אי-הגדרה
$f(x)$	↘	min	↗	

x	$\pi<x<\frac{3\pi}{2}$	$x=\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	max	↘

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{(+)}<0 \qquad f'\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\cos\frac{3\pi}{4}}{(+)}>0$$

$$f'\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-\frac{\cos\frac{5\pi}{4}}{(+)}>0 \qquad f'\left(\frac{7\pi}{4}\right)=-\frac{\cos\frac{7\pi}{4}}{(+)}<0$$

תשובה: $\min\left(\frac{\pi}{2},1\right)$, $\max\left(\frac{3\pi}{2},-1\right)$.

(iii) ראו סרטוט בספר, עמוד **1,735** .

(ג) ראו סרטוט בספר, עמוד **1,735** .

(ד) המחזור של הפונקציה הוא המחזור של $\sin x$ ולכן שווה ל- 2π ,

מכאן בעזרת סעיף (ב) נקבל:

(i) $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n,1\right)$, $n\in\mathbb{Z}$ $\qquad$ (ii) $\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k,-1\right)$, $k\in\mathbb{Z}$

(9) נסמן: צינור בעל קוטר קטן יכול למלא את הבריכה ב- a^2 שעות,

לכן צינור בעל קוטר גדול יכול למלא את הבריכה ב- a שעות.

בשעה אחת, הצינור בעל הקוטר הקטן מרוקן $\frac{1}{a^2}$ מהבריכה

והצינור בעל הקוטר הגדול ממלא $\frac{1}{a}$ מהבריכה.

נסמן ב- A את חלק הבריכה שהיה מלא בשעה $10:00$.

פונקציית המטרה: חלק הבריכה שהיה מלא בשעה $14:00$.

$$M(a)=A-\frac{6}{a^2}+\frac{4}{a}$$

$$M'(a)=\frac{12}{a^3}-\frac{4}{a^2}$$

$$M'(a)=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{12}{a^3}-\frac{4}{a^2}=0 \quad\Rightarrow\quad 4(3-a)=0 \quad\Rightarrow\quad a=3$$

$$M''(a)=-\frac{36}{a^4}+\frac{8}{a^3}$$

$$M''(3)=-\frac{36}{81}+\frac{8}{27}=-\frac{4}{27}<0$$

כלומר עבור $a=3$ הפונקציה $M(a)$ מקבלת ערך מקסימלי,

כלומר הצינור בעל הקוטר הגדול צריך למלא לבדו את הבריכה ב- 3 שעות.

גבי יקואל

משבצת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

◈ לכל הכיתות ◈ לכל השאלונים ◈ לכל הרמות