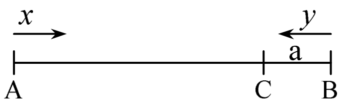
פתרון מבחן מס' 10 (ספר לימוד – שאלון 035806)



(1) נסמן: x קמ"ש – מהירות מכונית א',

y קמ"ש – מהירות מכונית ב',

C – נקודת המפגש בין שתי המכוניות.

(א) a ק"מ = BC הוא המרחק שעברה מכונית ב' עד הפגישה,

לכן $(a+240)$ ק"מ הוא המרחק AB , שעברה מכונית א' עד הפגישה,

$\frac{a}{y}$ שעות הוא זמן הנסיעה של מכונית ב' עד הפגישה,

$\frac{a+240}{x}$ שעות הוא זמן הנסיעה של מכונית א' עד הפגישה.

על סמך נתוני השאלה ניתן להרכיב את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} \frac{a}{x}=10 \ \Rightarrow \ x=\frac{a}{10} \\ \frac{a+240}{y}=9 \ \Rightarrow \ y=\frac{a+240}{9} \\ \frac{a+240}{x}=\frac{a}{y}+9 \ \Rightarrow \ \frac{(a+240)\cdot 10}{a}=\frac{a\cdot 9}{a+240}+9 \quad / \cdot a(a+240) \end{cases}$$

$$10\cdot(a+240)^2=9a^2+9a\cdot(a+240)$$

$$10a^2+4{,}800a+576{,}000=18a^2+2{,}160a$$

$$8a^2-2{,}640a-576{,}000=0 \ \Rightarrow \ a^2-330a-72{,}000=0$$

$$a_{1,2}=\frac{330\pm 630}{2} \ \Rightarrow \ a_1=480 \ , \ a_2=-150$$

הפתרון $a_2=-150$ נפסל, כי מרחק הוא גודל חיובי.

תשובה: מכונית ב' עברה עד הפגישה 480 ק"מ.

(ב) מהירות מכונית א': $x=\frac{a}{10}=\frac{480}{10}=48$ קמ"ש

מהירות מכונית ב': $y=\frac{a+240}{9}=\frac{480+240}{9}=80$ קמ"ש

(2)

$$a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3 \ \Rightarrow\ S_1=\frac{a_1}{1+\frac{1}{8}} \ \Rightarrow\ S_1=\frac{8a_1}{9}$$

$$b_1\ ,\ b_2\ ,\ b_3 \ \Rightarrow\ S_2=\frac{b_1}{1-q}\ ,\ \frac{1}{8}<\left|q\right|<1$$

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\frac{a_3}{b_3}+\ldots=\frac{S_1}{S_2}$$

נבדוק האם סדרה $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ היא גם סדרה הנדסית :

$$\frac{\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}}{\frac{a_n}{b_n}}=\frac{a_{n+1}\cdot b_n}{b_{n+1}\cdot a_n}=\frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot\frac{b_n}{b_{n+1}}=-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{q}=-\frac{1}{8q}=\text{const}$$

כלומר הסדרה $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ היא סדרה הנדסית.

$$\frac{1}{8}<\left|q\right|<1 \ \Rightarrow\ <\left|\frac{1}{q}\right|<8 \ \Rightarrow\ \frac{1}{8}<\left|-\frac{1}{8q}\right|<1$$

כלומר מנת הסדרה $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ קטנה מ- 1 ,

לכן הסדרה היא סדרה הנדסית אינסופית יורדת.

$$\frac{\frac{a_1}{b_1}}{1+\frac{1}{8q}}=\frac{S_1}{S_2} \ \Rightarrow\ \frac{8\cdot a_1\cdot q}{b_1\cdot(8q+1)}=\frac{8a_1}{9}\cdot\frac{1-q}{b_1}$$

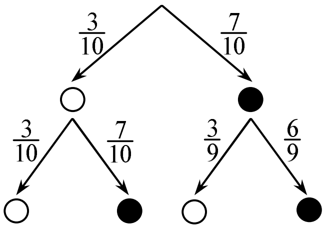
$$\frac{q}{8q+1}=\frac{1-q}{9} \ \Rightarrow\ 9q=-8q^2+7q+1$$

$$8q^2+2q-1=0 \ \Rightarrow\ q_{1\,,\,2}=\frac{-2\pm 6}{16} \ \Rightarrow\ q_1=\frac{1}{4}\ ,\ q_2=-\frac{1}{2}$$

שני הפתרונות מקיימים את התנאי $\frac{1}{8}<\left|q\right|<1$,

לפיכך, שניהם מתאימים לפתרון השאלה.

(3) (א)



$$P(\text{2 לבנים ו- 2 שחורים}) = P(\text{לבן}) \cdot P(\text{אחד מתוך 3 לבן}) + P(\text{שחור}) \cdot P(\text{אחד מתוך 3 שחור})$$

$$P(\text{2 לבנים ו- 2 שחורים}) = \frac{3}{10} \cdot \frac{3!}{1!2!}\left(\frac{3}{10}\right)^1 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^2 + \frac{7}{10} \cdot \frac{3!}{1!2!}\left(\frac{6}{9}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{9}\right)^2$$

$$P(\text{2 לבנים ו- 2 שחורים}) = \frac{3}{10} \cdot 3 \cdot \frac{147}{1{,}000} + \frac{7}{10} \cdot 3 \cdot \frac{2}{27} \approx 0.2879$$

(ב) "יותר כדורים לבנים משחורים" כלומר הוצאו 3 או 4 כדורים לבנים.

$$P(\text{ראשון לבן / יותר לבנים}) = \frac{P(\text{יותר לבנים} \cap \text{ראשון לבן})}{P(\text{יותר לבנים})}$$

$$P(\text{יותר לבנים} \cap \text{ראשון לבן}) =$$

$$= P(\text{ראשון לבן}) \cdot [P(\text{2 לבנים מתוך 3}) + P(\text{3 לבנים מתוך 3})] =$$

$$= \frac{3}{10}\left[\frac{3!}{2!1!}\left(\frac{3}{10}\right)^2 \cdot \frac{7}{10} + \left(\frac{3}{10}\right)^3\right] =$$

$$= \frac{3}{10}\left(3 \cdot \frac{9}{100} \cdot \frac{7}{10} + \frac{27}{1{,}000}\right) = 0.0648$$

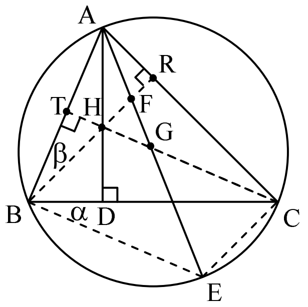
$$P(\text{יותר לבנים}) = P(\text{יותר לבנים} \cap \text{ראשון לבן}) + P(\text{יותר לבנים} \cap \text{ראשון שחור}) =$$

$$= 0.0648 + \frac{7}{10} \cdot P(\text{3 לבנים מתוך 3}) =$$

$$= 0.0648 + \frac{7}{10} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 =$$

$$= 0.0648 + \frac{7}{270} \approx 0.09073$$

$$P(\text{ראשון לבן / יותר לבנים}) = \frac{0.0648}{0.09073} \approx 0.7142$$



(4) (א) מכיוון ש- AE הוא קוטר הרי ש- $\measuredangle ABE = 90°$
כי זווית היקפית הנשענת על קוטר היא בת $90°$.

$\measuredangle ABE = \beta + \measuredangle HBC + \alpha$

לכן: $90° = \beta + \measuredangle HBC + \alpha$

כלומר: $\measuredangle HBC = 90° - \alpha - \beta$

מכיוון ש- H היא נקודת מפגש הגבהים
במשולש ABC הרי שהמשך BH חותך את AC
בנקודה R כך ש- $\measuredangle BRA = 90°$.

לכן: $\measuredangle BAC = 90° - \beta$ סכום זוויות ב- ΔABR הוא $180°$.

$\measuredangle BEC = 90° + \beta$ במרובע ABEC החסום במעגל
סכום זוויות נגדיות הוא $180°$.

כלומר: $\measuredangle BCE = 90° - \alpha - \beta$ סכום זוויות ב- ΔBCE הוא $180°$.

המשך CH חותך את AB בנקודה T כך ש- $\measuredangle BTC = 90°$
כי הנקודה H היא מפגש הגבהים ב- ΔABC ו- CT הוא גובה לצלע AB .

$\measuredangle HCB + \measuredangle BTC + \measuredangle TBC = 180°$ סכום זוויות ב- ΔTBC הוא $180°$.

$\measuredangle ABE = 90°$ זווית היקפית הנשענת על קוטר
היא זווית ישרה.

$\measuredangle ABC = \measuredangle ABE - \measuredangle CBE = 90° - \alpha$ חיסור זוויות.

ואז: $\measuredangle HCB + 90° + 90° - \alpha = 180°$

לכן: $\measuredangle HCB = \alpha$

(ב) בסעיף (א) הוכחנו $\measuredangle CBE = \measuredangle HCB = \alpha$.
אם זוויות מתחלפות שוות אז הישרים מקבילים, לכן: $HC \parallel BE$.
באופן דומה $\measuredangle HBC = \measuredangle BCE = 90° - \alpha - \beta$ ולכן $HB \parallel CE$.
מכאן במרובע BECH יש שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות
ולכן הוא מקבילית.

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(ג) $\measuredangle FBE=\measuredangle ABE-\measuredangle ABF=$ חיסור זוויות.

$=90^\circ-\beta$

$\measuredangle BAC=\measuredangle FBE=90^\circ-\beta$ נובע מסעיפים קודמים.

$\measuredangle ACB=\measuredangle BEF$ זוויות היקפיות הנשענות על אותה הקשת $\overset{\frown}{AB}$.

$\Downarrow$

$\Delta ABC\sim\Delta BFE$ לפי משפט דמיון ז.ז.

(ד) (i) $\measuredangle AEC=\measuredangle ABC=90^\circ-\alpha$ נובע ממה שמצאנו קודם ומכך שזוויות היקפיות הנשענות על אותה הקשת $\overset{\frown}{AC}$ הן זוויות שוות.

$\measuredangle GCE=\measuredangle BCE+\measuredangle HCB=90^\circ-\alpha-\beta+\alpha=90^\circ-\beta$

$\measuredangle CGE=180^\circ-(90^\circ-\alpha)-(90^\circ-\beta)$

כלומר: $\measuredangle FGH=\measuredangle CGE=\alpha+\beta$ זוויות קדקודיות שוות.

$\measuredangle FHG=\measuredangle BHT=90^\circ-\beta$ סכום זוויות ב- ΔBTH הוא 180° + זוויות קדקודיות.

לכן: $\measuredangle BAC=\measuredangle FHG=90^\circ-\beta$

$\measuredangle ACB=\measuredangle FGH=\alpha+\beta$ מה שהוכחנו + סכום זוויות ב- ΔABC הוא 180° .

$\Downarrow$

$\Delta ABC\sim\Delta HFG$ לפי משפט דמיון ז.ז.

(ii) $\measuredangle CEG=\measuredangle ABC$ זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת $\overset{\frown}{AC}$ הן זוויות שוות.

$\measuredangle CGE=\measuredangle ACB=\alpha+\beta$ הוכח כבר.

$\Downarrow$

$\Delta CEG\sim\Delta ABC$ לפי משפט דמיון ז.ז.

המשך בעמוד הבא ➤➤➤

(ה) (*i*) לפי סעיף (ד) : $\Delta ABC \sim \Delta CEG$, $\Delta HFG \sim \Delta ABC$,

לכן : $\Delta HFG \sim \Delta CEG$. מכאן :

$$\frac{S_{\Delta CEG}}{S_{\Delta HFG}} = \left(\frac{GC}{GH}\right)^2 = \left(\frac{3}{1}\right)^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad S_{\Delta CEG} = 9 \cdot 4 = 36 \text{ סמ"ר}$$

(*ii*) בסעיף (ג) הוכחנו : $\Delta BFE \sim \Delta ABC$

ובסעיף (ד)(*i*) הוכחנו כי $\Delta HFG \sim \Delta ABC$,

לכן $\Delta HFG \sim \Delta BFE$ ומכאן :

$$\frac{S_{\Delta BFE}}{S_{\Delta HFG}} = \left(\frac{BE}{HG}\right)^2 = \left(\frac{HC}{HG}\right)^2 = \left(\frac{HG+GC}{HG}\right)^2 = \left(\frac{4a}{a}\right)^2 = 16$$

$$S_{\Delta BFE} = 16 \cdot 4 = 64 \text{ סמ"ר}$$

$$S_{GHBE} = S_{\Delta BFE} - S_{\Delta HFG} = 64 - 4 = 60 \text{ סמ"ר}$$

$$S_{BHCE} = S_{GHBE} + S_{\Delta GCE} = 60 + 36 = 96 \text{ סמ"ר}$$

(5) שאלות המשלבות גיאומטריה + טריגונומטריה הורדו מתוכנית הלימודים.

(6) (א) $AC = t$, $AB = 2t$, $BC = kt$

זווית קהה היא הזווית הגדולה ביותר במשולש

והיא נמצאת מול הצלע הגדולה ביותר.

קיימות שתי אפשרויות :

(*i*) $1 < k < 2$, ואז AB היא הצלע הגדולה במשולש.

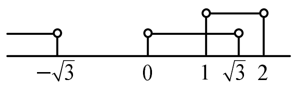
לפי משפט הקוסינוסים ב- ΔABC :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos \measuredangle C$$

$$\cos \measuredangle C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} = \frac{t^2 + k^2t^2 - 4t^2}{2 \cdot t \cdot kt} = \frac{k^2 - 3}{2k}$$

$\measuredangle C$ היא זווית קהה, לכן $\cos \measuredangle C < 0$, לכן :

$$\frac{k^2-3}{2k} < 0 \quad \Rightarrow \quad k < -\sqrt{3} \text{ או } 0 < k < \sqrt{3}$$

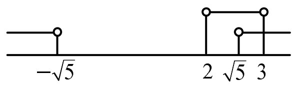


כלומר : $1 < k < \sqrt{3}$.

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(*ii*) $2<k<3$, ואז BC היא הצלע הגדולה במשולש.

בדרך דומה: $k^2t^2 = 4t^2 + t^2 - 2\cdot 2t\cdot t\cdot \cos\measuredangle A$



$\cos\measuredangle A = \frac{5-k^2}{4} < 0 \;\Rightarrow\; k<-\sqrt{5}$ או $k>\sqrt{5}$

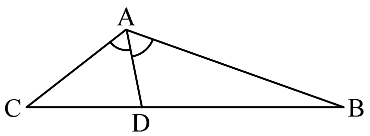
כלומר: $\sqrt{5}<k<3$.

תשובה: $\sqrt{5}<k<3$ או $1<k<\sqrt{3}$.

הערה: התנאים $k<3$, $k>1$ נובעים מהעובדה שסכום שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית.

(ב) כאשר $k=\sqrt{7}$ נקבל: $BC=\sqrt{7}\,t$, $AB=2t$, $AC=t$

AD חוצה-זווית $\measuredangle BAC$.



לפי משפט הקוסינוסים ב- ΔABC :

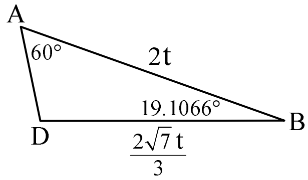
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos\measuredangle A$$
$$7t^2 = 4t^2 + t^2 - 2\cdot 2t\cdot t\cdot\cos\measuredangle A$$
$$\cos\measuredangle A = \frac{-2t^2}{4t^2} = -\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \measuredangle A = 120^\circ$$
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos\measuredangle B$$
$$t^2 = 4t^2 + 7t^2 - 2\cdot 2t\cdot\sqrt{7}\,t\cdot\cos\measuredangle B$$
$$\cos\measuredangle B = \frac{10t^2}{4\sqrt{7}\,t^2} = \frac{5}{2\sqrt{7}} \;\Rightarrow\; \measuredangle B = 19.1066^\circ$$

נסמן: $BD = x$ ואז $CD = \sqrt{7}\,t - x$.

לפי משפט חוצה-זווית ב- ΔABC :

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BD} \;\Rightarrow\; \frac{t}{2t} = \frac{\sqrt{7}\,t - x}{x}$$
$$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{7}\,t - x}{x} \;\Rightarrow\; x = 2\sqrt{7}\,t - 2x$$
$$3x = 2\sqrt{7}\,t \;\Rightarrow\; x = \frac{2\sqrt{7}\,t}{3}$$

לפי משפט הסינוסים ב- ΔABD :



$$\frac{AD}{\sin 19.1066^\circ} = \frac{\frac{2\sqrt{7}\,t}{3}}{\sin 60^\circ} \;\Rightarrow\; AD = \frac{2}{3}t$$

(7) (א) אסימפטוטה אנכית מתקבלת כאשר המכנה שווה ל- 0 (ומכנה שונה מ- 0),

לכן המשוואות של האסימפטוטות האנכיות הן: $x=\text{b}$, $x=-\text{b}$.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(3+\frac{\text{a}x^2+9}{x^2-\text{b}^2}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(3+\frac{\text{a}-\frac{9}{x^2}}{1-\frac{\text{b}^2}{x^2}}\right)=3+\text{a}$$

מכאן משוואת האסימפטוטה האופקית היא: $y=\text{a}+3$.

(ב)
$$f'(x)=\frac{2\text{a}x(x^2-\text{b}^2)-2x(\text{a}x^2+9)}{(x^2-\text{b}^2)^2}=\frac{-2\text{ab}^2x-18x}{(x^2-\text{b}^2)^2}=\frac{-2x(\text{ab}^2+9)}{(x^2-\text{b}^2)^2}$$

$$\text{a}\ ,\ \text{b}^2\ge 0\ \Rightarrow\ \text{ab}^2+9>0$$

$(x^2-\text{b}^2)^2>0$ לכל x בתחום ההגדרה ($x\neq\pm\text{b}$),

לכן $\frac{2(\text{ab}^2+9)}{(x^2-\text{b}^2)^2}>0$ לכל x בתחום ההגדרה, לכן בהנחה ש- $\text{b}>0$:

הפונקציה עולה ($f'(x)>0$) כאשר $x<0$ וגם $x\neq-\text{b}$,

כלומר עבור: $-\text{b}<x<0$, $x<-\text{b}$.

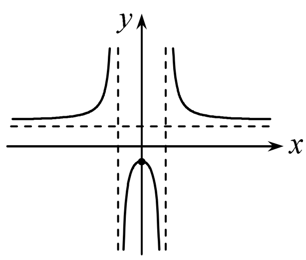
הפונקציה יורדת ($f'(x)<0$) כאשר $x>0$ וגם $x\neq\text{b}$,

כלומר עבור: $x>\text{b}$, $0<x<\text{b}$.

(ג)
$$f(0)<0\ \Rightarrow\ 3-\frac{9}{\text{b}^2}<0\ \Rightarrow\ \frac{3}{\text{b}^2}>1\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \text{b}^2<3\ ,\ \text{b}\neq0\ \Rightarrow\ -\sqrt{3}<\text{b}<\sqrt{3}\ ,\ \text{b}\neq0$$

(ד)



(8) (א) $-4 \le x < -2.5 \;\Rightarrow\; 2x+5<0 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; f(x) = -2x-5-x = -3x-5$

(ב) $-2.5 < x \le 4 \;\Rightarrow\; 2x+5>0 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; f(x) = 2x+5-x = x+5$

(ג) – (ה) $\lim\limits_{x\to -2.5^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to -2.5^-} (-3x-5)' = -3$

$\lim\limits_{x\to -2.5^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to -2.5^+} (x+5)' = 1$

$f'(2.5^-) \ne f'(2.5^+)$, לכן עבור $x=-2.5$ נגזרת הפונקציה אינה מוגדרת.

בתחום $-4 \le x < -2.5$ נגזרת הפונקציה שלילית ולכן הפונקציה יורדת.

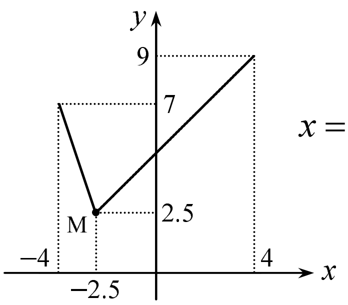
בתחום $-2.5 < x \le 4$ נגזרת הפונקציה חיובית ולכן הפונקציה עולה.

מכאן נקבל שנקודת המינימום המוחלט של הפונקציה היא:

$x=-2.5 \;\Rightarrow\; f(-2.5) = 0-(-2.5) = 2.5$

כלומר: $(-2.5, 2.5)$.

סקיצה של גרף הפונקציה:



(9)

$$
\begin{array}{r|l}
\multicolumn{1}{r}{-x+12} & \\
\hline
-4x^2+51x-36 & 4x-3 \\
-\underline{(-4x^2+3x)} & \\
48x-36 & \\
-\underline{(48x-36)} & \\
0 &
\end{array}
$$

ולכן: $f(x) = \dfrac{-4x^2+51x-36}{4x-3} = -x+12 \quad (x \ne \frac{3}{4})$

$g(x) = 3x-4$

שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x :

$y=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{4}{3} \;\Rightarrow\; \left(\frac{4}{3}, 0\right)$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x :

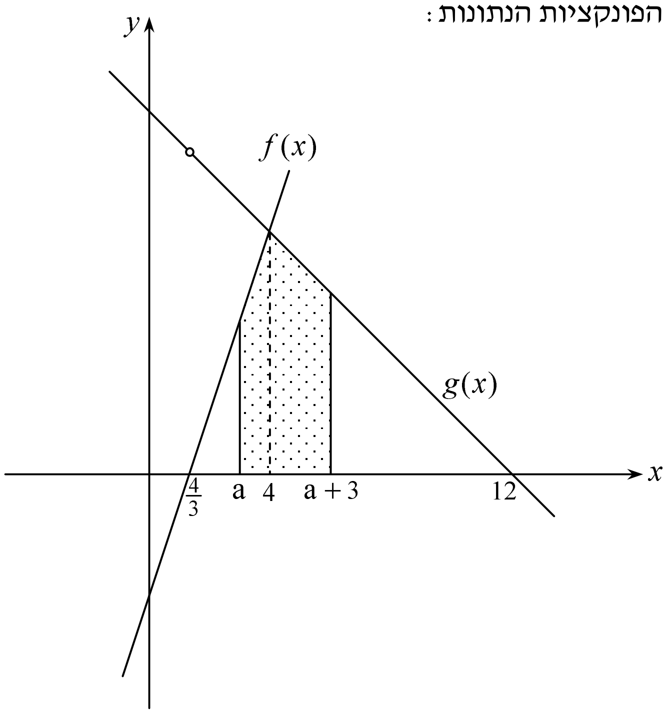
$$y=0 \Rightarrow -x+12=0 \Rightarrow x=12 \Rightarrow (12,0)$$

שיעורי נקודת החיתוך בין הגרפים של שתי הפונקציות :

$$\begin{cases} y=12-x \\ y=3x-4 \end{cases} \Rightarrow 12-x=3x-4 \Rightarrow 4x=16 \Rightarrow x=4$$

$$x=4 \Rightarrow y=12-4=8 \Rightarrow (4,8)$$

נסרטט את הגרפים של הפונקציות הנתונות :



$$S=\frac{g(\text{a})+g(4)}{2}\cdot(4-\text{a})+\frac{f(4)+f(\text{a}+3)}{2}\cdot(\text{a}+3-4)=$$

$$=\frac{3\text{a}-4+8}{2}\cdot(4-\text{a})+\frac{8+(9-\text{a})}{2}\cdot(\text{a}-1)=$$

$$=\frac{(3\text{a}+4)(4-\text{a})}{2}+\frac{(17-\text{a})(\text{a}-1)}{2}=\frac{-4\text{a}^2+26\text{a}-1}{2}$$

$$\frac{-4\text{a}^2+26\text{a}-1}{2}=20.5 \Rightarrow 2\text{a}^2-13\text{a}+21=0$$

$$\text{a}_{1,2}=\frac{13\pm1}{4} \Rightarrow \text{a}_1=3.5\ ,\ \text{a}_2=3$$

גבי יקואל

משבצת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

◈ לכל הכיתות ◈ לכל השאלונים ◈ לכל הרמות