פתרון מבחן מס' 9 (ספר לימוד – שאלון 035806)

(1) נסמן ב- x ימים את הזמן שבו קבוצה I יכולה לסלול את הכביש לבדה,

וב- y ימים את הזמן שבו קבוצה II יכולה לסלול את הכביש לבדה.

מכאן, ביום אחד קבוצה I סללה $\frac{1}{x}$ מכל הכביש

וקבוצה II סללה $\frac{1}{y}$ מכל הכביש.

לפי נתוני השאלה ניתן להרכיב את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} \frac{14}{x}+\frac{24}{y}=\frac{3}{10} \\ 60\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1 \end{cases}$$

נסמן: $\frac{1}{y}=\text{b}$, $\frac{1}{x}=\text{a}$ ונקבל:

$$\begin{cases} 14\text{a}+24\text{b}=0.3 \quad /\cdot 5 \\ 60\text{a}+60\text{b}=1 \quad /\cdot 2 \end{cases} \Rightarrow -\begin{cases} 70\text{a}+120\text{b}=1.5 \\ 120\text{a}+120\text{b}=2 \end{cases}$$

$$-50\text{a}=-0.5 \Rightarrow \text{a}=0.01 \Rightarrow x=\frac{1}{0.01}=100$$

$$\text{b}=\frac{1-0.6}{60}=\frac{0.4}{60} \Rightarrow y=\frac{60}{0.4}=150$$

תשובה: קבוצה I יכולה לסלול את כל הכביש לבדה ב- 100 ימים,

קבוצה II יכולה לסלול את כל הכביש לבדה ב- 150 ימים.

(2)

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = \frac{a_1(q^2-1)}{q-1}$$

$$S_3 = \frac{a_1(q^3-1)}{q-1}$$

$$\vdots$$

$$S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$$

לכן: $T_n = S_1 + S_2 + \ldots + S_n = a_1 + \frac{a_1(q^2-1)}{q-1} + \ldots + \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$

במקום a_1 נרשום $\frac{a_1(q-1)}{q-1}$, ונקבל:

$$T_n = \frac{a_1}{q-1}\left[(q-1)+(q^2-1)+(q^3-1)+\ldots+(q^n-1)\right]=$$

$$=\frac{a_1}{q-1}\left[q+q^2+\ldots+q^n-1-1-1\ldots-1\right]=$$

$$=\frac{a_1}{q-1}\left(q+q^2+\ldots+q^n-n\right)$$

את הסכום $q+q^2+q^3+\ldots+q^n$ נמצא כסכום סדרה הנדסית.

$$q+q^2+q^3+\ldots+q^n = \frac{q(q^n-1)}{q-1}$$

ואז: $T_n = \frac{a_1}{q-1}\left[\frac{q(q^n-1)}{q-1}-n\right]$

צ"ל: $n\cdot k = qS_n + (1-q)T_n$.

נצא מאגף ימין ונראה שהביטוי שווה ל- $n\cdot k$:

$$qS_n + (1-q)T_n = q\cdot\frac{a_1(q^n-1)}{q-1} +^{-1}\cancel{(1-q)}\,\frac{a_1}{\cancel{q-1}}\cdot\left[\frac{q(q^n-1)}{q-1}-n\right]=$$

$$=\frac{a_1q(q^n-1)}{q-1}-\frac{a_1q(q^n-1)}{q-1}+a_1n = a_1n = k\cdot n$$

כי נתון ש- $a_1 = k$.

(3) לפי הנתון:

$$① \; N(\bar{B} \cap \bar{A}) = 40 \;,\; ② \; P(A) = 0.6 \;,\; ③ \; P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

נסמן ב- x_1 את ממוצע הגילים של הצעירים,

ב- x_2 את ממוצע הגילים של המבוגרים,

ב- N_1 את מספר הצעירים וב- N_2 את מספר המבוגרים.

$$x_1 = 28 \;,\; x_2 = 42 \;\Rightarrow\; \frac{28N_1 + 42N_2}{N_1 + N_2} = 33.6 \;④$$

נשלים את טבלת השכיחויות:

טבלת שכיחויות		קבוצת גיל		
		B : צעירים	$\bar{B}$: מבוגרים	סה״כ
הכנסה	A : גבוהה	$40 + 0.2N$	$0.4N - 40$	$0.6N$
	$\bar{A}$: נמוכה	$0.4N - 40$	40	$0.4N$
	סה״כ	$0.6N$	$0.4N$	N

לפי ④:

$$28N_1 + 42N_2 = 33.6N_1 + 33.6N_2$$

$$8.4N_2 = 5.6N_1 \;\Rightarrow\; N_1 = 1.5N_2 \;⑤$$

$$N_1 + N_2 = N \;\Rightarrow\; 2.5N_2 = N$$

$$N_2 = 0.4N \;\Rightarrow\; N_1 = 0.6N$$

$$N(A) = 0.6N \;,\; N(\bar{A}) = N - 0.6N = 0.4N$$

$$N(A \cap \bar{B}) = 0.4N - 40 \;,\; N(B \cap \bar{A}) = 0.4N - 40$$

$$N(A \cap B) = 0.6N - (0.4N - 40) = 40 + 0.2N$$

לפי ③:

$$\frac{40 + 0.2N}{N} = \frac{0.6N}{N} \cdot \frac{0.6N}{N}$$

$$\frac{40 + 0.2N}{N} = 0.36 \;\Rightarrow\; 40 + 0.2N = 0.36N$$

$$0.16N = 40 \;\Rightarrow\; N = 250$$

$$P(B / \bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})} = \frac{N(\bar{A} \cap B)}{N(\bar{A})} = \frac{0.4N - 40}{0.4N} = \frac{0.4 \cdot 250 - 40}{0.4 \cdot 250} = \frac{60}{100} = 0.6$$

תשובה: שיעור המנויים הצעירים מתוך קבוצת המנויים בעלי הכנסה נמוכה הוא 60% .

(4)

$\measuredangle ACB = 90^\circ$ (זווית היקפית הנשענת על קוטר שווה ל- 90°)

$\measuredangle MEA = 90^\circ$ (רדיוס החוצה את המיתר מאונך לו)

$BM = MA = R$

$CE = EA$ (נתון)

$\Downarrow$

ME קטע אמצעים ב- ΔABC

$\Downarrow$

$ME = \frac{1}{2} \cdot BC$ (קטע אמצעים שווה למחצית הצלע
שאותה הוא לא חוצה)

נסמן: $\measuredangle A = \alpha$, ואז:

$\measuredangle CBA = 90^\circ - \alpha$ (סכום זוויות ב- ΔABC שווה ל- 180°)

$\measuredangle CDB = 90^\circ$ (נתון $AB \perp CD$)

$\measuredangle BCD = \alpha$ (סכום זוויות ב- ΔBCD שווה ל- 180°)

$\Downarrow$

ז. $\measuredangle BCD = \measuredangle MAE = \alpha$

ז. $\measuredangle CDB = \measuredangle MEA = 90^\circ$

$\Downarrow$

$\Delta BCD \sim \Delta MAE$ (לפי משפט דמיון ז.ז.)

$\Downarrow$

$\frac{BC}{MA} = \frac{CD}{AE}$ (במשולשים דומים צלעות מתאימות
מתייחסות באותו יחס)

$\Downarrow$

$CD = \frac{AE \cdot BC}{MA}$

$$\frac{S_{\Delta BCD}}{S_{\Delta AME}} = \frac{BD \cdot CD}{2} \cdot \frac{2}{ME \cdot AE} = \frac{BD \cdot AE \cdot BC}{MA} \cdot \frac{1}{ME \cdot AE} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3} MA \cdot BC}{MA \cdot \frac{1}{2} BC} = \frac{2}{3}$$

(5) שאלות המשלבות גיאומטריה + טריגונומטריה הורדו מתוכנית הלימודים.

(6) (א) נסמן: $AO = x$, $BO = y$, $CO = z$, $DO = w$.

לפי משפט פיתגורס ב- ΔABO , ΔCOD :

$$x^2 + y^2 = c^2 \quad , \quad z^2 + w^2 = d^2$$

נחבר אגפים מתאימים ונקבל: $c^2 + d^2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$

לפי משפט פיתגורס ב- ΔBOC , ΔAOD :

$$y^2 + z^2 = b^2 \quad , \quad w^2 + x^2 = a^2$$

נחבר אגפים מתאימים ונקבל: $a^2 + b^2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$

מכאן: $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ (שני הגדלים השווים לגודל שלישי, שווים).

(ב) נתון: $CM \parallel AB$. נסמן: $\measuredangle DCM = \alpha$.

$CM \parallel AB$, $BC \parallel AM$, לכן המרובע $ABCM$ הוא מקבילית.

מכאן: $AM = BC = b$, $MC = AB = c$.

$MD = AD - AM = a - b$ (חיסור קטעים)

לפי משפט הקוסינוסים ב- ΔMCD :

$$MD^2 = CM^2 + CD^2 - 2 \cdot CM \cdot CD \cdot \cos \measuredangle C$$

$$(a-b)^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cdot \cos\alpha$$

$$a^2 + b^2 - 2ab = c^2 + d^2 - 2cd \cdot \cos\alpha$$

לפי סעיף (א) מתקיים: $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, לכן:

$$-2ab = -2cd \cdot \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad ab = cd \cdot \cos\alpha$$

(ג) (i)

$$S_{\Delta CMD} = \frac{CM \cdot CD}{2} \cdot \sin\alpha = \frac{cd}{2} \cdot \sin\alpha =$$

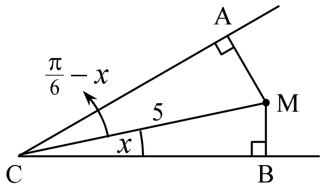
$$= \frac{ab}{2\cos\alpha} \cdot \sin\alpha = \frac{ab}{2} \cdot tg\alpha$$

(ii) נסמן ב- h את גובה הטרפז.

$$S_{\Delta CMD} = \frac{MD \cdot h}{2} = \frac{ab}{2} \cdot tg\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{a-b}{2} \cdot h = \frac{ab}{2} \cdot tg\alpha$$

$$h = \frac{ab}{a-b} \cdot tg\alpha$$

$$S_{ABCD} = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{ab}{a-b} \cdot tg\alpha = \frac{ab(a+b)}{2(a-b)} \cdot tg\alpha$$



(7) נסמן $\measuredangle MCB = x$ $\left(0<x<\frac{\pi}{6}\right)$

ואז $\measuredangle ACM = \frac{\pi}{6}-x$.

נביע את שטח המרובע MACB

באמצעות x .

ב- ΔMBC :

$$\sin x = \frac{MB}{5} \quad \Rightarrow \quad MB = 5\sin x$$

$$\cos x = \frac{BC}{5} \quad \Rightarrow \quad BC = 5\cos x$$

$$S_{\Delta MBC} = \frac{BC\cdot MB}{2} = \frac{25\sin x\cos x}{2} = \frac{25}{4}\cdot\sin 2x$$

כאשר נעזרנו בזהות $2\sin x\cos x = \sin 2x$.

ב- ΔAMC :

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right) = \frac{AM}{5} \quad \Rightarrow \quad AM = 5\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right) = \frac{AC}{5} \quad \Rightarrow \quad AC = 5\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$$

$$S_{\Delta AMC} = \frac{AC\cdot AM}{2} = \frac{25\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}{2} = \frac{25}{4}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$$

כאשר נעזרנו בזהות $2\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right) = \sin\left[2\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\right]$.

$$S_{AMBC} = f(x) = S_{\Delta MBC} + S_{\Delta AMC} = \frac{25}{4}\cdot\sin 2x + \frac{25}{4}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$$

$$f'(x) = \frac{25}{4}\cdot 2\cos 2x + \frac{25}{4}\cdot(-2)\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$$

נשווה את $f'(x)$ לאפס ונקבל: $\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$

פתרונות המשוואה הם:

$$2x = -\frac{\pi}{3}+2x+2\pi n \quad \text{או} \quad 2x = \frac{\pi}{3}-2x+2\pi n$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

אין פתרון או $x = \frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n$

בתחום $0<x<\frac{\pi}{6}$ נקבל $x=\frac{\pi}{12}$.

$$f''(x) = \frac{25}{2}\cdot 2\cdot(-\sin 2x) - \frac{25}{2}\cdot(-2)\cdot\left[-\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)\right]$$

$$f''\left(\frac{\pi}{12}\right) = -25\sin\frac{\pi}{6} - 25\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) < 0 \quad \Rightarrow \quad \max$$

כלומר עבור $x=\frac{\pi}{12}$ שטח המרובע MACB הוא מקסימלי.

$$S_{MACB\ \text{מקסימלי}} = f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{25}{4}\sin\frac{\pi}{6} + \frac{25}{4}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) = 6.25 \ \text{יחידות שטח}$$

(8) נביע באמצעות k את שיעור ה- x של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .

$$0 = kx - 3 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{k}$$

$$V = \pi \int_0^{\frac{3}{k}} (kx-3)^4 \, dx = \pi \left[\frac{(kx-3)^5}{5k} \right]_0^{\frac{3}{k}} =$$

$$= \pi \left[0 - \frac{(-3)^5}{5k} \right] = \frac{243\pi}{5k}$$

נתון כי נפח גוף הסיבוב שווה ל- 27π .

$$\frac{243\pi}{5k} = 27\pi \quad \Rightarrow \quad k = 1.8$$

$$S = \int_0^{\frac{3}{1.8}} (1.8x-3)^2 \, dx = \frac{(1.8x-3)^3}{3 \cdot 1.8} \Bigg|_0^{\frac{5}{3}} = 0 - \frac{(-3)^3}{5.4} =$$ 5 יחידות שטח

(9) (א)

$$\begin{cases} 3x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq 0 \\ \sqrt{3x} - 3 \neq 0 \end{cases}$$ וגם

$$\sqrt{3x} - 3 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{3x} \neq 3 \quad / (\ )^2$$

$$3x \neq 9$$

$$x \neq 3$$

כלומר תחום ההגדרה של הפונקציה: $x \geq 0$, $x \neq 3$.

(ב) אסימפטוטה אנכית $x = 3$ (עבור $x = 3$ המכנה מתאפס והמונה אינו מתאפס).

אין אסימפטוטה אופקית עבור $x \to \infty$ כי: $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

(ג)

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad (0,0)$$

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{x}{\sqrt{3x} - 3} \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad (0,0)$$

תשובה: $(0,0)$ היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

המשך בעמוד הבא >>>

(ד)
$$f'(x)=\frac{1\cdot(\sqrt{3x}-3)-x\cdot\frac{3}{2\sqrt{3x}}}{(\sqrt{3x}-3)^2}$$

נשווה את הנגזרת לאפס ונקבל: $\sqrt{3x}-3-\frac{3x}{2\sqrt{3x}}=0$

נכפול את אגפי המשוואה ב- $2\sqrt{3x}$ ונקבל:

$$2\cdot 3x-6\sqrt{3x}-3x=0 \;\Rightarrow\; 3x=6\sqrt{3x} \;\Rightarrow\; x=2\sqrt{3x}$$

נעלה את שני האגפים בריבוע ונקבל: $x^2=4\cdot 3x \;\Rightarrow\; x^2-12x=0$

פתרונות המשוואה: $x_1=0\ ,\ x_2=12$.

$$f(0)=0\ ,\ f(12)=4$$

שני הפתרונות מקיימים את המשוואה $x=2\sqrt{3x}$ (כלומר לפני שהעלינו את שני האגפים בריבוע) ונמצאים בתחום ההגדרה של הפונקציה.

x	0 < x < 3	3	3 < x < 12	12	x > 12
f′(x)	−	נקודת אי-הגדרה	−	0	+
f(x)	↘		↘	min	↗

$$f'(x)=\frac{3x-6\sqrt{3x}}{2\sqrt{3x}\cdot(\sqrt{3x}-3)^2} \;\Rightarrow\; f'(x)=\frac{3x-6\sqrt{3x}}{+}$$

$$f'(1)=\frac{3-6\sqrt{3}}{+}<0$$

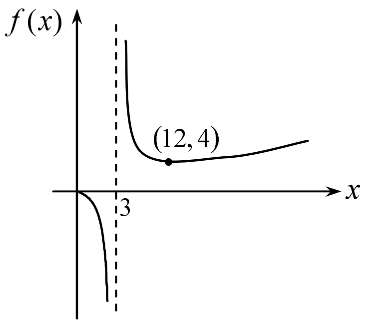
$$f'(4)=\frac{12-6\sqrt{12}}{+}<0$$

$$f'(13)=\frac{39-3\sqrt{39}}{+}>0$$

מסקנה: $\max(0,0)\ ,\ \min(12,4)$.

(ה) ניעזר בסעיפים (א) – (ד)

ונסרטט סקיצה של גרף הפונקציה:



המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(ו) תחום הירידה של הפונקציה $g(x)$ הוא בתחום שבו $g'(x)<0$,
כלומר בתחום שבו $f(x)\cdot f'(x)<0$.
תחום זה מתקיים עבור :

$\begin{cases} f(x)<0 \\ f'(x)>0 \end{cases}$ וגם או $\begin{cases} f(x)>0 \\ f'(x)<0 \end{cases}$ וגם

ניתן להיעזר בסעיף (ה) כדי לדעת את התחומים בהם $f(x)>0$
או $f(x)<0$, וגם לדעת את התחומים בהם $f'(x)<0$
(כאשר גרף הפונקציה $f(x)$ יורד), והתחום שבו $f'(x)>0$
(כאשר גרף הפונקציה $f(x)$ עולה).
נקבל :

$\begin{cases} f(x)>0 \\ f'(x)<0 \end{cases}$ וגם $\Rightarrow$ $\begin{cases} x>3 \\ 0<x<3 \ , \ 3<x<12 \end{cases}$ וגם $\Rightarrow$ $3<x<12$

$\begin{cases} f(x)<0 \\ f'(x)>0 \end{cases}$ וגם $\Rightarrow$ $\begin{cases} 0<x<3 \\ x>12 \end{cases}$ וגם $\Rightarrow$ אין פתרון

תשובה: תחום הירידה של $g(x)$: $3<x<12$.

גבי יקואל

משבצת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929