

פתרון מבחן מס' 8 (ספר לימוד – שאלון 035806)

- (1) נסמן: $x =$ בכמה דקות צינור I ממלא לבד את הבריכה.
 $y =$ בכמה דקות צינור II ממלא לבד את הבריכה.
 $z =$ בכמה דקות צינור III ממלא לבד את הבריכה.

עבודה (חלקי בריכה)	זמן (בדקות)	קצב (הספק) (ביחידות של חלקי בריכה דקה)	
$\frac{8}{x}$	8	$\frac{1}{x}$	צינור I
$\frac{8}{y}$	8	$\frac{1}{y}$	צינור II
$\frac{8}{z}$	8	$\frac{1}{z}$	צינור III

$$\text{נקבל את המשוואה: } \frac{8}{x} + \frac{8}{y} + \frac{8}{z} = 1$$

נתון שצינור II לבד ממלא את הבריכה ב- 30% מהזמן שצינור I ממלא את הבריכה, כלומר: $y = 0.3x$.

נתון שצינור III לבד ממלא את הבריכה ב- 48 דקות יותר מהזמן שצינור II לבד ממלא אותה, כלומר, $z = y + 48$.

ניעזר בקשרים: $y = 0.3x$, $z = y + 48$, ובמשוואה $\frac{8}{x} + \frac{8}{y} + \frac{8}{z} = 1$,

$$\text{ונקבל: } \frac{8}{x} + \frac{8}{0.3x} + \frac{8}{0.3x + 48} = 1 \quad / \cdot x(0.3x + 48)$$

$$8(0.3x + 48) + 26\frac{2}{3}(0.3x + 48) + 8x = x(0.3x + 48)$$

לאחר פתיחת הסוגריים, כינוס ופתרון המשוואה הריבועית המתקבלת, נקבל את הפתרון $x = 40$ (הפתרון $x = -\frac{416}{3}$ נפסל כי x הוא גודל חיובי).

תשובה: צינור I ממלא לבד את הבריכה ב- 40 דקות.

צינור II ממלא לבד את הבריכה ב- 12 דקות $= 0.3 \cdot 40$.

צינור III ממלא לבד את הבריכה ב- 60 דקות $= 12 + 48$.

(2) נבדוק האם $a_1, a_3, a_5, \dots, a_{2k-1}$ מהווים סדרה הנדסית:

$$\frac{a_{2k+1}}{a_{2k-1}} = \frac{a_1 \cdot q^{2k}}{a_1 \cdot q^{2k-2}} = q^2 = \text{const}, \quad Q_1 = q^2 < 1$$

לכן סדרה זו היא סדרה הנדסת אינסופית יורדת.

נבדוק האם $a_3, a_7, a_{11}, \dots, a_{4n-1}$ מהווים סדרה הנדסית:

$$\frac{a_{4n+3}}{a_{4n-1}} = \frac{a_1 \cdot q^{4n+2}}{a_1 \cdot q^{4n-2}} = q^4 = \text{const}, \quad Q_2 = q^4 < 1$$

לכן סדרה זו היא סדרה הנדסת אינסופית יורדת.

$$\begin{cases} a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \dots = m \\ a_3 + a_7 + a_{11} + a_{15} + \dots = n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a_1}{1-Q_1} = m \\ \frac{a_3}{1-Q_2} = n \end{cases} \Rightarrow : \begin{cases} \frac{a_1}{1-q^2} = m \\ \frac{a_1 q^2}{1-q^4} = n \end{cases} \quad (\alpha)$$

$$\frac{a_1}{1-q^2} \cdot \frac{1-q^4}{a_1 q^2} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{(1-q^2)(1+q^2)}{q^2(1-q^2)} = \frac{m}{n}$$

$$n + nq^2 = mq^2 \Rightarrow q^2 = \frac{n}{m-n} \Rightarrow q = \pm \sqrt{\frac{n}{m-n}} > 0$$

$$q = \sqrt{\frac{n}{m-n}} \Rightarrow a_1 = m \cdot (1 - q^2) = m \cdot \left(1 - \frac{n}{m-n}\right) = m \cdot \frac{m-n-n}{m-n} = \frac{m(m-2n)}{m-n}$$

$$S_3 = 2m \Rightarrow \frac{a_1}{1-Q_3} = 2m \quad (\beta)$$

$$\frac{m(m-2n)}{(m-n)(1-Q_3)} = 2m \Rightarrow 1-Q_3 = \frac{m-2n}{2 \cdot (m-n)}$$

$$Q_3 = 1 - \frac{m-2n}{2 \cdot (m-n)} = \frac{2m-2n-m+2n}{2 \cdot (m-n)} = \frac{m}{2 \cdot (m-n)}$$

(3) (א) על סמך נתוני השאלה, נרכיב את המשוואות הבאות ($v_2 > v_1$):

$$\begin{cases} \frac{10}{v_2} + \frac{6}{v_1} = \frac{44}{60} = \frac{11}{15} \\ \frac{10}{v_1} + \frac{6}{v_2} = \frac{52}{60} = \frac{13}{15} \end{cases}$$

נסמן: $x = \frac{1}{v_1}$, $y = \frac{1}{v_2}$. נציב ונקבל:

$$\begin{cases} 6x + 10y = \frac{11}{15} & / \cdot 5 \\ 10x + 6y = \frac{13}{15} & / \cdot 3 \end{cases} \Rightarrow - \begin{cases} 30x + 50y = \frac{55}{15} \\ 30x + 18y = \frac{39}{15} \end{cases}$$

$$32y = \frac{16}{15} \Rightarrow y = \frac{1}{30}$$

$$10x + 6 \cdot \frac{1}{30} = \frac{13}{15} \Rightarrow x = \frac{1}{15}$$

$$x = \frac{1}{15} \Rightarrow v_1 = 15 \text{ קמ"ש}, y = \frac{1}{30} \Rightarrow v_2 = 30 \text{ קמ"ש}$$

(ב) נסמן את מספר הימים שמשה רכב במהירות v_1 ב- a ,

ואז מספר הימים שמשה רכב במהירות v_2 הוא $a + 2$.

$$a + a + 2 = 30 \Rightarrow a = 14$$

$$P(AB / v_1) = \frac{9}{14}$$

$$\frac{N(AB \cap v_1)}{N(v_1)} = \frac{9}{14} \Rightarrow \frac{N(AB \cap v_1)}{14} = \frac{9}{14} \Rightarrow N(AB \cap v_1) = 9$$

$$N(v_1 \cap CD) = N(v_1) - N(v_1 \cap AB) = 14 - 9 = 5$$

$$P(v_1 / CD) = \frac{5}{11}$$

$$\frac{N(v_1 \cap CD)}{N(CD)} = \frac{5}{11} \Rightarrow \frac{5}{N(CD)} = \frac{5}{11} \Rightarrow N(CD) = 11$$

$$N(AB) = N - N(CD) = 30 - 11 = 19$$

$$N(v_2 \cap AB) = N(AB) - N(v_1 \cap AB) = 19 - 9 = 10$$

$$N(v_2 \cap CD) = N(CD) - N(v_1 \cap CD) = 11 - 5 = 6$$

◀◀◀ המשך בעמוד הבא

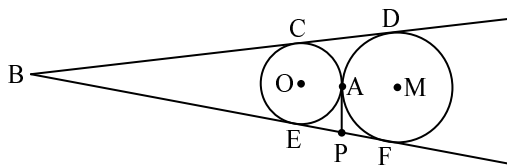
נשלים את הטבלה הנתונה :

סה"כ	מהירות		טבלת שכיחויות	
	v_2	v_1		
19	10	9	AB	קטע
11	6	5	CD	
30	16	14	סה"כ	

$$T = 9 \cdot \frac{AB}{v_1} + 10 \cdot \frac{AB}{v_2} + 5 \cdot \frac{CD}{v_1} + 6 \cdot \frac{CD}{v_2}$$

$$T_{\text{כולל}} = 9 \cdot \frac{10}{15} + 10 \cdot \frac{10}{30} + 5 \cdot \frac{6}{15} + 6 \cdot \frac{6}{30} =$$

$$= 6 + 3\frac{1}{3} + 2 + 1\frac{1}{5} = 12\frac{8}{15} = 12 \text{ שעות ו- } 32 \text{ דקות}$$



(4)

(א) AP משיק משותף לשני המעגלים.

(מנקודה מחוץ למעגל יוצאים) $\angle PAF = \angle PFA = \alpha$

(שני משיקים שווים + סימון) $\angle PAE = \angle PEA = \beta$

(סכום זוויות ב- $\triangle AEF$) $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$

\Downarrow

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

\Downarrow

$$\angle EAF = 90^\circ$$

(מנקודה מחוץ למעגל יוצאים) $BD = BF$ (ב)

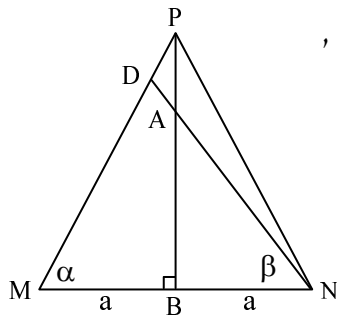
(שני משיקים שווים) $BC = BE$

(חיסור קטעים שווים מקטעים שווים) $BD - BC = BF - BE$

(חיסור קטעים) $CD = EF$

(ג) פתרון לסעיף זה יעלה בימים הקרובים.

(5) שאלות המשלבות גיאומטריה + טריגונומטריה הורדו מתוכנית הלימודים.



(6) נתון: $PA = \frac{1}{5} \cdot PB$, $PB \perp MN$, $MP = PN$

$\angle DNB = \beta$, $\angle DMN = \alpha$

במשולש שווה-שוקיים, גובה לבסיס הוא גם

תיכון וחוצה-זווית הראש, לכן: $MB = BN = a$

$$\frac{PA}{PB} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{PA}{AB} = \frac{1}{4}$$

מכאן, נסמן: $PA = b$, $AB = 4b$

$$\tan \beta = \frac{AB}{BN} = \frac{4b}{a} \quad \text{ב-} \Delta ABN \quad (\text{א})$$

$$\tan \alpha = \frac{PB}{MB} = \frac{5b}{a} \quad \text{ב-} \Delta PBM$$

$$\frac{\tan \beta}{\tan \alpha} = \frac{4b}{a} \cdot \frac{a}{5b} = \frac{4}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{MB}{PM} \Rightarrow PM = \frac{a}{\cos \alpha} \quad \text{ב-} \Delta PBM \quad (\text{ב})$$

$$\frac{DM}{\sin \angle N} = \frac{MN}{\sin \angle MDN} \quad \text{לפי משפט הסינוסים ב-} \Delta MND$$

$$DM = \frac{2a \sin \beta}{\sin[180^\circ - (\alpha + \beta)]} = \frac{2a \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$\frac{PM}{DM} = \frac{a}{\cos \alpha} \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{2a \sin \beta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta \cos \alpha} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}{\sin \beta \cos \alpha} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\tan \alpha}{\tan \beta} + 1 \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{4} + 1 \right) = \frac{9}{8}$$

$$6x + 3y = a \Rightarrow y = \frac{a}{3} - 2x \quad (7) \text{ נתון:}$$

$$M(x) = 3 \cdot xy = 3x \cdot \left(\frac{a}{3} - 2x\right) = ax - 6x^2 \quad \text{(א) פונקציית המטרה:}$$

$$M'(x) = 0 \Rightarrow a - 12x = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{12} \Rightarrow y = \frac{a}{3} - \frac{a}{6} = \frac{a}{6}$$

$$M''(x) = -12 < 0 \Rightarrow \max$$

תשובה: עבור $x = \frac{a}{12}$, $y = \frac{a}{6}$ שטח המעטפת יהיה מקסימלי.

$$V(x) = S_{\text{בסיס}} \cdot h = \frac{x^2 \sin 60^\circ}{2} \cdot y = \quad \text{(ב) פונקציית המטרה:}$$

$$= \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{a}{3} - 2x\right)$$

$$V(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{ax^2}{3} - 2x^3\right)$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{2ax}{3} - 6x^2\right) = 0 \Rightarrow 2x \cdot \left(\frac{a}{3} - 3x\right) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{a}{9}$$

x	x = 0	0 < x < $\frac{a}{9}$	x = $\frac{a}{9}$	x > $\frac{a}{9}$
V'(x)		+	0	-
V(x)		↗	max	↘

$$V'\left(\frac{a}{10}\right) = (+) \cdot \left(\frac{a}{3} - \frac{3a}{10}\right) > 0$$

$$V'\left(\frac{a}{8}\right) = (+) \cdot \left(\frac{a}{3} - \frac{3a}{8}\right) < 0$$

$$x = \frac{a}{9} \Rightarrow y = \frac{a}{3} - \frac{2a}{9} = \frac{a}{9}$$

תשובה: עבור $x = y = \frac{a}{9}$ נפח המנסרה יהיה מקסימלי.

(8) אם לגרפים יש משיק משותף בנקודה $(0,0)$, אז:

$$g'(0) = f'(0) \quad g'(x) = 3mx^2 + n$$

$$f'(x) = 2x - 4 \quad 2 \cdot 0 - 4 = 3m \cdot 0 + n \Rightarrow n = -4$$

גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- x בנקודות שבהן:

$$x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x - 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 4$$

$$g(4) = f(4) \Rightarrow 64m - 4 \cdot 4 = 16 - 4 \cdot 4 \Rightarrow m = \frac{1}{4} \quad \text{אז:}$$

$$g(x) = \frac{x^3}{4} - 4x \quad \text{כלומר:}$$

נבדוק האם יש נקודות חיתוך נוספות בין הגרפים:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 4x = \frac{x^3}{4} - 4x \Rightarrow x^2 \left(1 - \frac{x}{4}\right) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = 4$$

יש רק שתי נקודות חיתוך בין הגרפים.

$$I = \int_0^4 [g(x) - f(x)] dx = \int_0^4 \left(\frac{x^3}{4} - 4x - x^2 + 4x\right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^4}{16} - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_0^4 = \frac{256}{16} - \frac{64}{3} = 16 - 21\frac{1}{3} = -5\frac{1}{3}$$

$$S_{\text{מבוקש}} = -I = -\left(-5\frac{1}{3}\right) = 5\frac{1}{3} \quad \text{ביטוי זה שלילי, לכן: יחידות שטח}$$

(9) נבטא באמצעות a את שיעורי נקודות החיתוך בין הגרפים (הנקודות N ו- M).

$$4 - x^2 = (a^2 - 1)x^2 \Rightarrow x^2(a^2 - 1 + 1) = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{a^2}$$

$$x_1 = \frac{2}{a} \Rightarrow y_1 = -\frac{4}{a^2} + 4 \Rightarrow N\left(\frac{2}{a}, 4 - \frac{4}{a^2}\right)$$

$$x_2 = -\frac{2}{a} \Rightarrow y_1 = -\frac{4}{a^2} + 4 \Rightarrow M\left(-\frac{2}{a}, 4 - \frac{4}{a^2}\right)$$

$$y_N = y_M \Rightarrow MN \parallel x\text{-ה} \Rightarrow MN \perp y\text{-ה}$$

◀◀◀ המשך בעמוד הבא

$$S(a) = S_{\Delta OMN} = \frac{MN \cdot h}{2} = \frac{x_N - x_M}{2} \cdot y_M = \text{פונקציית המטרה:}$$
$$= \frac{4}{a \cdot 2} \cdot \left(4 - \frac{4}{a^2}\right) = 8 \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a^3}\right)$$

$$S'(a) = 0 \Rightarrow 8 \cdot \left(-\frac{1}{a^2} + \frac{3}{a^4}\right) = 0 \Rightarrow \frac{8}{a^4}(-a^2 + 3) = 0$$

$$a^2 = 3 \Rightarrow a = \pm\sqrt{3} > 1 \Rightarrow a = \sqrt{3}$$

$$S''(a) = 8 \cdot \left(\frac{2}{a^3} - \frac{12}{a^5}\right)$$

$$S''(\sqrt{3}) = 8 \cdot \left(\frac{2}{3\sqrt{3}} - \frac{12}{9\sqrt{3}}\right) = 8 \cdot \left(\frac{2}{3\sqrt{3}} - \frac{4}{3\sqrt{3}}\right) < 0 \Rightarrow \max$$

תשובה: עבור $a = \sqrt{3}$ שטח המשולש OMN יהיה מקסימלי.

גבי יקואל

מ ש ב צ ת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

לכל הכיתות ✦ לכל השאלונים ✦ לכל הרמות