פתרון מבחן מס' 7 (ספר לימוד – שאלון 035806)

(1) נסמן ב- x קמ"ש את מהירות המשאית,

ואז $(x+12)$ קמ"ש יסמן את מהירות האוטובוס

ו- $2x$ קמ"ש יסמן את מהירות האופנוע.

2.5 שעות לפני ההגעה למחנה:

המשאית הייתה במרחק של $2.5x$ ק"מ מהמחנה

והאוטובוס היה במרחק של $2.5\cdot(x+12)$ ק"מ מהמחנה.

מהירות ההתקרבות של המשאית והאופנוע היא: $x+2x=$ קמ"ש $3x$

מהירות ההתקרבות של האוטובוס והאופנוע היא:

$x+12+2x=$ קמ"ש $3x+12$

לפי נתוני השאלה, נרכיב את המשוואה הבאה (10 דקות $=\frac{1}{6}$ שעה):

$$\frac{2.5\,(x+12)}{3x+12}-\frac{2.5x}{3x}=\frac{1}{6}$$

$$\frac{2.5x+30}{3x+12}-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}\quad\Rightarrow\quad\frac{2.5x+30}{3x+12}=1$$

$$2.5x+30=3x+12\quad\Rightarrow\quad 0.5x=18\quad\Rightarrow\quad x=36$$

תשובה: מהירות המשאית היא 36 קמ"ש.

(2) סדרה חשבונית:

$$\{a_n\}\quad a_1=d\ ,\ a_n\neq 0$$

$$\{b_n\}\quad b_1=a_1=d$$

$$b_2=a_8t=t(a_1+7d)=t(d+7d)=8td$$

$$b_3=t^2a_{28}=t^2(a_1+27d)=28t^2d$$

$$\{c_n\}\quad c_1=8t\cdot a_2=8t(a_1+d)=16td$$

$$c_2=25a_9=25(a_1+8d)=225d$$

$$c_3=(4t+32)a_{13}=(4t+32)(a_1+12d)=52d(t+8)$$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(א) אם b_n היא סדרה חשבונית, אז :

$$b_2 - b_1 = b_3 - b_2 \quad \Rightarrow \quad 2b_2 = b_1 + b_3$$

$$2 \cdot 8td = d + 28t^2 d \quad / : d \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 28t^2 - 16t + 1 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{16 \pm 12}{56} \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{1}{2} \ , \ t_2 = \frac{1}{14}$$

אם c_n היא סדרה חשבונית, אז :

$$c_2 - c_1 = c_3 - c_2 \quad \Rightarrow \quad 2c_2 = c_1 + c_3$$

$$2 \cdot 225d = 16td + 52d(t+8) \quad / : d \neq 0$$

$$450 = 16t + 52t + 416 \quad \Rightarrow \quad 68t = 34 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{2}$$

כדי ששתי הסדרות החדשות c_n , b_n יהיו סדרות חשבוניות, נדרוש :

$t = \frac{1}{2}$ וגם $t_2 = \frac{1}{14}$, $t_1 = \frac{1}{2}$, כלומר : $t = \frac{1}{2}$.

(ב) עבור $t = \frac{1}{2}$:

$$b_1 = d \ , \ D_b = b_2 - b_1 = 4d - d = 3d$$

$$T_k = [2b_1 + D_b(k-1)] \cdot \frac{k}{2} =$$

$$= [2d + 3d(k-1)] \cdot \frac{k}{2} = d \cdot (3k-1) \cdot \frac{k}{2}$$

$$c_1 = 8d \ , \ D_c = c_2 - c_1 = 225d - 8d = 217d$$

$$U_k = [2c_1 + D_c(k-1)] \cdot \frac{k}{2} =$$

$$= [16d + 217d(k-1)] \cdot \frac{k}{2} = d \cdot (217k - 201) \cdot \frac{k}{2}$$

$$U_k = 72 \cdot T_k \quad \Rightarrow \quad d \cdot (217k - 201) \cdot \frac{k}{2} = 72d \cdot (3k-1) \cdot \frac{k}{2}$$

$$217k - 201 = 72(3k-1)$$

$$217k - 201 = 216k - 72 \quad \Rightarrow \quad k = 129$$

(3) נסמן מאורעות:

A – התלמיד גר בעיר, B – התלמיד לומד בחטיבת ביניים.

לכן, לפי הנתונים: $P(B) = 0.3\ ,\ P(\bar{A}/\bar{B}) = \frac{2}{7}\ ,\ P(B/\bar{A}) = \frac{1}{3}$

נרכיב את הטבלה הבאה:

	A	$\bar{A}$	סה"כ
B	0.2	0.1	0.3
$\bar{B}$	0.5	0.2	0.7
סה"כ	0.7	0.3	1

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.3 = 0.7$$

$$P(\bar{A}/\bar{B}) = \frac{P(\bar{A}\cap\bar{B})}{P(\bar{B})} \Rightarrow$$

$$\frac{2}{7} = \frac{P(\bar{A}\cap\bar{B})}{0.7} \Rightarrow$$

$$P(\bar{A}\cap\bar{B}) = 0.2$$

$$P(A\cap\bar{B}) = P(\bar{B}) - P(\bar{A}\cap\bar{B}) = 0.7 - 0.2 = 0.5$$

נסמן: $P(\bar{A}) = x$ ואז: $P(A) = 1 - x$, ומכאן:

$$P(B/\bar{A}) = \frac{P(\bar{A}\cap B)}{P(\bar{A})} \Rightarrow \frac{P(\bar{A}) - P(\bar{A}\cap\bar{B})}{x} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{x-0.2}{x} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3x - 0.6 = x \Rightarrow x = 0.3 = P(\bar{A})$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0.3 = 0.7$$

$$P(\bar{A}\cap B) = P(\bar{A}) - P(\bar{A}\cap\bar{B}) = 0.3 - 0.2 = 0.1$$

$$P(A\cap B) = P(B) - P(\bar{A}\cap B) = 0.3 - 0.1 = 0.2$$

(א) $P(A) = 0.7$

(ב) $N\cdot P(\bar{A}\cap B) = 60 \Rightarrow N = \frac{60}{P(\bar{A}\cap B)} = \frac{60}{0.1} =$ 600 תלמידים

(ג) מספר תלמידי חט"ב המתגוררים בעיר: $0.5\cdot 600 =$ 300 תלמידים

מספר תלמידי היסודי המתגוררים בעיר: $0.2\cdot 600 =$ 120 תלמידים

בסך הכול, 420 תלמידים מתגוררים בעיר.

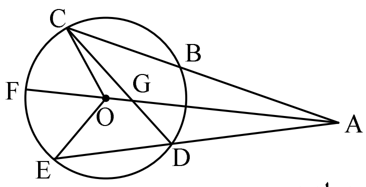
מבין התלמידים הגרים בעיר, תלמידי התיכון מהווים $\frac{1}{4}$, כלומר

יתר התלמידים הגרים בעיר מהווים $\frac{3}{4}$.

$\frac{N(\text{תיכון מהעיר})}{N(\text{יסודי וחט"ב מהעיר})} = \frac{1}{3} \Rightarrow N(\text{תיכון מהעיר}) = \frac{1}{3}\cdot 420 =$ 140 תלמידים

כמות זו היא חצי מכל תלמידי התיכון, לכן בשנה הבאה

יילמדו בתיכון 280 תלמידים.



(4) (א) נתון: $AC = AE$

נתבונן ב- ΔAEO , ΔACO

(צ) $CO = EO = R$ רדיוסים במעגל שווים זה לזה.

(צ) $AO = AO$ כל גודל שווה לעצמו.

(צ) $AC = AE$ נתון.

$\Downarrow$

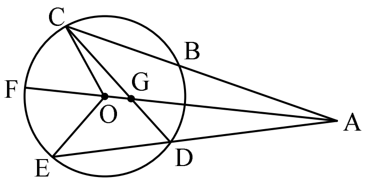
$\Delta ACO \cong \Delta AEO$ לפי משפט חפיפה צ.צ.צ.

$\Downarrow$

$\measuredangle COA = \measuredangle EOA$ זוויות מתאימות במשולשים חופפים.

$\measuredangle COF = \measuredangle EOF$ ($180° - \measuredangle COA = 180° - \measuredangle EOA$) חיסור זוויות שוות מ- $180°$.

מ.ש.ל. (א).



(ב) צ"ל: $\Delta ADG \sim \Delta AOE$

ז. $\measuredangle GAD = \measuredangle EAO$ כל גודל שווה לעצמו.

$\measuredangle COF = \measuredangle EOF = \alpha$ הוכחנו בסעיף (א) +סימון.

$\measuredangle EOA = 180° - \measuredangle FOE$ חיסור זוויות.

$\measuredangle EOA = 180° - \alpha$

$\measuredangle CDE = \frac{1}{2}(\measuredangle COF + \measuredangle EOF)$ זווית היקפית שווה למחצית זווית מרכזית הנשענת על אותה קשת.

$\measuredangle CDE = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha) = \alpha$ הצבה.

$\measuredangle ADG = 180° - \measuredangle GDE$ חיסור זוויות.

$\measuredangle ADG = 180° - \alpha$ הצבה.

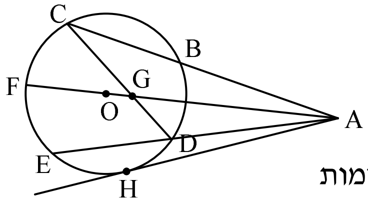
ז. $\measuredangle ADG = \measuredangle EOA = 180° - \alpha$ שני גדלים שווים לגודל שלישי שווים ביניהם.

$\Delta ADG \sim \Delta AOE$ לפי משפט דמיון ז.ז.

מ.ש.ל. (ב).

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(ג) $\Delta ADG \sim \Delta AOE$ הוכחנו בסעיף (ב).



פרופורציית צלעות מתאימות במשולשים דומים

$$\frac{AD}{AO} = \frac{AG}{AE}$$

$$\frac{AD}{10} = \frac{9.801}{AE}$$

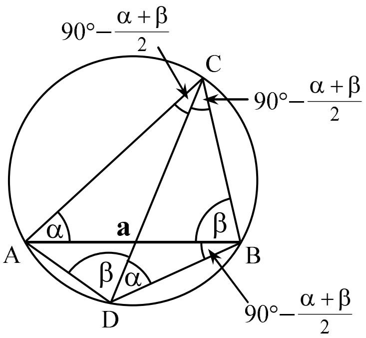
$$\Downarrow$$

$$AD \cdot AE = 10 \cdot 9.801 = 98.01$$

$AD \cdot AE = AH^2$ אם מנקודה מחוץ למעגל יוצאים חותך ומשיק, אז ריבוע אורך המשיק שווה למכפלת החותך בחלקו החיצוני.

$AH = \sqrt{98.01} =$ 9.9 ס"מ

(5) ניעזר בנתונים.



נביע באמצעות α ו- β זוויות נוספות (ראו סרטוט),

תוך שימוש במשפטים:

סכום זוויות במשולש הוא $180°$,

במעגל על קשתות שוות נשענות זוויות היקפיות שוות.

(א) לפי משפט הסינוסים - ΔABC :

$$\frac{a}{\sin[180° - (\alpha+\beta)]} = 2R$$

כלומר:

$$2R = \frac{a}{\sin(\alpha+\beta)}$$

לפי משפט הסינוסים ב- ΔBCD :

$$\frac{CD}{\sin\left(\beta + 90° - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)} = 2R$$

כלומר:

$$CD = 2R \cdot \sin\left(\beta + 90° - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) =$$

$$= \frac{a}{\sin(\alpha+\beta)} \cdot \sin\left(90° - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \frac{a \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin(\alpha+\beta)}$$

המשך בעמוד הבא >>>

(ב) ניעזר בנתונים $\beta = 3\alpha$, $CD = AB$, ובסעיף (א) ונקבל:

$$CD = AD \Rightarrow \frac{a \cdot \cos\frac{\alpha - 3\alpha}{2}}{\sin(\alpha + 3\alpha)} = a$$

$$\cos(-\alpha) = \sin 4\alpha$$

$$\cos\alpha = \cos(90° - 4\alpha)$$

$\alpha = -90° + 4\alpha + 360°n$ או $\alpha = 90° - 4\alpha + 360°n$

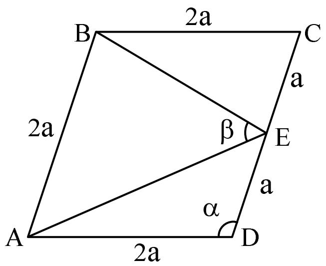
$\alpha = 30° + 120°n$ או $\alpha = 18° + 72°n$

תשובה: זוויות המשולש הן:

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$\measuredangle A = 30°$, $\measuredangle B = 90°$, $\measuredangle C = 60°$ או $\measuredangle A = 18°$, $\measuredangle B = 54°$, $\measuredangle C = 108°$

(לפי נתוני השאלה, $\alpha = 90°$ אינו מתאים)



(6) נסמן: $CE = ED = a$,

לכן אורך צלע המעוין שווה ל- $2a$.

לפי משפט הקוסינוסים ב- ΔADE :

$$AE^2 = AD^2 + ED^2 - 2 \cdot AD \cdot ED \cdot \cos\alpha$$

$$AE^2 = 4a^2 + a^2 - 2 \cdot 2a \cdot a\cos\alpha$$

$$AE^2 = a^2(5 - 4\cos\alpha)$$

לפי משפט הקוסינוסים ב- ΔBCE :

$$BE^2 = BC^2 + CE^2 - 2 \cdot BC \cdot CE \cdot \cos(180° - \alpha)$$

$$BE^2 = 2a^2 + a^2 + 2 \cdot 2a \cdot a\cos\alpha \;\; \Rightarrow \;\; BE^2 = a^2(5 + 4\cos\alpha)$$

לפי משפט הקוסינוסים ב- ΔABE :

$$BA^2 = AE^2 + BE^2 - 2 \cdot AE \cdot BE \cdot \cos\beta$$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

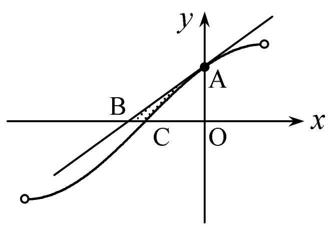
$$4a^2 = 5a^2 - 4a^2\cos\alpha + 5a^2 + 4a^2\cos\alpha -$$
$$-2\cdot a\sqrt{5-4\cos\alpha}\cdot a\sqrt{5+4\cos\alpha}\cdot\cos\beta$$
$$4 = 10 - 2\sqrt{(5-4\cos\alpha)(5+4\cos\alpha)}\cos\beta$$
$$3 = \sqrt{25-16\cos^2\alpha}\cdot\cos\beta \;\Rightarrow\; \cos\beta = \frac{3}{\sqrt{25-16\cos^2\alpha}}$$

(7)
$$y = \int_{-2}^{2}(2x^3+3a^2x^2+a)\,dx = \left(\tfrac{x^4}{2}+a^2x^3+ax\right)\Big|_{-2}^{2} =$$
$$= \tfrac{1}{2}\cdot(16-16) + a^2\cdot(8+8) + a\cdot(2+2) = 16a^2+4a$$

הגרף של הפונקציה $y=16a^2+4a$ הוא פרבולה בעלת מינימום :

$$x_{\min} = x_{\text{קדקוד}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2\cdot16} = -\frac{1}{8}$$
$$y_{\min} = y_{\text{קדקוד}} = 16\cdot\frac{1}{64} - 4\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$
$$y \ge y_{\min} \;\Rightarrow\; y \ge -\frac{1}{4}$$

(8) נמצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה A :



$$f'(x) = 2\cdot\frac{-\sin x\sqrt{1-\sin x} - \frac{-\cos x\cdot\cos x}{2\sqrt{1-\sin x}}}{(1-\sin x)} =$$
$$= 2\cdot\frac{-2\sin x\,(1-\sin x)+\cos^2 x}{2\,(1-\sin x)\sqrt{1-\sin x}} =$$
$$= \frac{-4\sin x + 4\sin^2 x + 2\cos^2 x}{2\,(1-\sin x)\sqrt{1-\sin x}}$$
$$f'(0) = \frac{-4\cdot0+4\cdot0^2+2\cdot1^2}{2\,(1-0)\sqrt{1-0}} = 1 \quad , \quad f(0) = \frac{2\cdot1}{\sqrt{1-0}} = 2$$
$$y-2 = 1\cdot(x-0) \;\Rightarrow\; y = x+2$$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

נמצא את שיעורי נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x (הנקודה B):

$$y=0 \;\Rightarrow\; x+2=0 \;\Rightarrow\; x=-2 \;\Rightarrow\; \mathrm{B}(-2,0)$$

נמצא את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x (הנקודה C):

$$f(x)=0 \;\Rightarrow\; \frac{2\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}=0 \;\Rightarrow\; 2\cos x=0 \;\Rightarrow\; \cos x=0$$

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi \mathrm{n}\ ,\ \mathrm{n}\in\mathbb{Z}$$

בתחום הנתון:

$$x=x_{\mathrm{B}}=\frac{\pi}{2}-\pi=-\frac{\pi}{2}$$

$$S_{\text{מבוקש}}=S_{\Delta \mathrm{ABO}}-S_{\text{מתחת הגרף}}=\frac{|\mathrm{OB}|\cdot|\mathrm{OA}|}{2}-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{2\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}\,dx=$$

$$=\frac{2\cdot 2}{2}+\left(4\sqrt{1-\sin x}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}=$$

$$=2+4\left(\sqrt{1-0}-\sqrt{1+1}\right)=\left(6-4\sqrt{2}\right)\ \text{יחידות שטח}$$

(9) (א) תחום הגדרה:

$$\begin{cases} x+\mathrm{a}\ge 0 \\ x^2\ne 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge -\mathrm{a} \\ x\ne 0 \end{cases} \Rightarrow -\mathrm{a}\le x<0\ ,\ x>0$$

(ב) אסימפטוטה אנכית:

$$\lim_{x\to 0}\left(3+\frac{\sqrt{x+\mathrm{a}}}{x^2}\right)=\left(3+\frac{\sqrt{\mathrm{a}}}{0}\right)=\infty \;\Rightarrow\; x=0$$

אסימפטוטה אופקית ימנית:

$$\lim_{x\to \infty}\left(3+\frac{\sqrt{x+\mathrm{a}}}{x^2}\right)=3 \;\Rightarrow\; y=3$$

אין צורך לבדוק אסימפטוטה שמאלית, כי $x\ge -\mathrm{a}$ ולא יכול לשאוף ל- $-\infty$.

(ג) + (ד)

$$f'(x)=\frac{\frac{x^2}{2\sqrt{x+\mathrm{a}}}-2x\sqrt{x+\mathrm{a}}}{x^4}=\frac{x^2-4x^2-4\mathrm{a}x}{2x^4\sqrt{x+\mathrm{a}}}=\frac{-3x^2-4\mathrm{a}}{2x^3\sqrt{x+\mathrm{a}}}$$

$$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; \frac{-3x^2-4\mathrm{a}}{2x^3\sqrt{x+\mathrm{a}}}=0$$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

x	$-a<x<0$	$x=0$	$x>0$
$f'(x)$	$+$	נקודת אי-הגדרה	$-$
$f(x)$	↗		↘

$$f'\left(-\frac{a}{2}\right)=\frac{\frac{3a}{4}-4a}{-2\cdot\frac{a^3}{8}\cdot(+)}>0 \;,\; f'(a)=\frac{-3a-4a}{2a^3\cdot(+)}<0$$

מכיוון ש- $a>0$, הרי ש- $-3x^2-4a<0$ ולכן אין אף נקודה בתחום ההגדרה שבה הנגזרת מתאפסת.

נקודות קצה : $f(-a)=3+\frac{0}{a^2}=3$

לכן, בנקודת הקצה $(-a,3)$ לגרף הפונקציה יש נקודת מינימום.

תחום ירידה : $x>0$, תחום עלייה : $-a<x<0$.

(ה) ראו סרטוט בפתרון השאלה בספר, עמוד 1,717 .

גבי יקואל

משבצת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

◈ לכל הכיתות ◈ לכל השאלונים ◈ לכל הרמות