

פתרון מבחן מס' 6 (ספר לימוד – שאלון 035806)

(1) נסמן ב- x $\frac{\text{מטר}}{\text{שנייה}}$ את מהירותה של תמי,

וב- y $\frac{\text{מטר}}{\text{שנייה}}$ את מהירותו של טל.

עד הפגישה הראשונה הרצים עברו 48 מטרים, לכן: $\frac{48}{x} - \frac{48}{y} = 3$

עד הפגישה השנייה הרצים עברו יחד פעמיים את המרחק AB,

כלומר 176 מטר $= 88 \cdot 2$, ותמי רצה 3 שניות יותר מטל, לכן:

$$12y + (12 + 3)x = 176 \Rightarrow 15x + 12y = 176$$

נפתור את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} \frac{48}{x} - \frac{48}{y} = 3 \\ 15x + 12y = 176 \end{cases} \quad / \cdot \frac{xy}{3} \Rightarrow \begin{cases} 16y - 16x = xy \\ y = \frac{176 - 15x}{12} \end{cases}$$

$$16 \cdot \frac{176 - 15x}{12} - 16x = x \cdot \frac{176 - 15x}{12} \quad / \cdot 12$$

$$2,816 - 240x - 192x = 176x - 15x^2 \Rightarrow 15x^2 - 608x + 2,816 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{608 \pm 448}{30} \Rightarrow x_1 = 35.2, \quad x_2 = \frac{16}{3}$$

$$x_1 = 35.2 \Rightarrow y = \frac{176 - 15 \cdot 35.2}{12} = -29\frac{1}{3} \quad \text{ולא תיתכן מהירות שלילית}$$

$$x = \frac{16}{3} \quad \text{לכן:}$$

$$y = \frac{176 - 15 \cdot \frac{16}{3}}{12} = \frac{96}{12} = 8$$

נסמן ב- t שניות את הזמן שעבר מהזינוק של תמי עד הפגישה השנייה, מכאן:

$$t \cdot \frac{16}{3} + (t - 3) \cdot 8 = 176 \Rightarrow \frac{40}{3}t = 200 \Rightarrow t = 15 \text{ שניות}$$

במשך זמן זה, תמי עברה: $80 = 15 \cdot \frac{16}{3}$ מ', כלומר הפגישה השנייה

התרחשה במרחק: $8 \text{ מ'} = 80 - 88$ מנקודה B.

(2) נוכיח כי הסדרה a_n היא סדרה חשבונית.

$$a_{n+1} - a_n = [3(n+1) - 12] - (3n - 12)$$

$$a_{n+1} - a_n = 3n + 3 - 12 - 3n + 12 = 3$$

מכיוון שההפרש בין כל איבר (פרט לאיבר הראשון) לאיבר שלפניו הוא גודל

קבוע, הרי ש- a_n זו סדרה חשבונית שבה $d = 3$, $a_1 = 3 \cdot 1 - 12 = -9$.

סכום n האיברים הראשונים בסדרה a_n הוא:

$$S_n = \frac{[2(-9) + (n-1) \cdot 3]n}{2} = \frac{(-18 + 3n - 3)n}{2}$$

$$S_n = \frac{(3n-21)n}{2} = 1.5n^2 - 10.5n \quad \text{כלומר:}$$

$$b_{n+1} - b_n = 1.5n^2 - 10.5n + 18 \quad \text{ומכאן נקבל:}$$

מכיוון שבסדרה b_n יש איברים עוקבים השווים זה לזה,

הרי שההפרש $b_{n+1} - b_n$ שווה לאפס עבורם. כלומר:

$$1.5n^2 - 10.5n + 18 = 0$$

$$n^2 - 7n + 12 = 0$$

$$n_2 = 4, \quad n_1 = 3 \quad \text{פתרון המשוואה:}$$

$$\text{כלומר } b_4 - b_3 = 0 \text{ וגם } b_5 - b_4 = 0.$$

לכן, $b_3 = b_4 = b_5$ כלומר, האיברים העוקבים השווים זה לזה

נמצאים במקומות השלישי, הרביעי והחמישי.

(3) נסמן: $P(\text{טעים לי}) = a$, מכאן: $P(\text{טעים וריח}) = 1 - a$

$$P(\text{טעים לי} \cap \text{אורגנית}) = 0.4a$$

$$P(\text{טעים לי} \cap \text{לא אורגנית}) = a - 0.4a = 0.6a$$

$$P(\text{טעים וריח} \cap \text{אורגנית}) = 0.7(1 - a) = 0.7 - 0.7a$$

$$P(\text{טעים וריח} \cap \text{לא אורגנית}) = 0.3(1 - a) = 0.3 - 0.3a$$

$$P(\text{אורגנית}) = 0.4a + 0.7 - 0.7a = 0.7 - 0.3a$$

$$P(\text{לא אורגנית}) = 0.6a + 0.3 - 0.3a = 0.3 + 0.3a$$

המשך בעמוד הבא <<<

$$P(\text{א}) \cdot \frac{15}{13} = P(\text{אורגנית}) \Rightarrow a = \frac{15}{13}(0.7 - 0.3a)$$

$$13a = 10.5 - 4.5a \Rightarrow 17.5a = 10.5 \Rightarrow a = 0.6$$

$$P(\text{משה קנה מוצר מתוצרת אורגנית}) = 0.7 - 0.3a = 0.7 - 0.3 \cdot 0.6 = 0.52$$

$$P(\text{אורגנית} / \text{טעם וריח}) = \frac{0.7 - 0.3a}{0.7 - 0.3a} = \frac{0.7 - 0.3 \cdot 0.6}{0.7 - 0.3 \cdot 0.6} = \frac{0.52}{0.52} = 1$$

$$P(\text{לא אורגנית} / \text{טעם וריח}) = \frac{0.3a}{0.3 + 0.3a} = \frac{0.3 \cdot 0.6}{0.3 + 0.3 \cdot 0.6} = \frac{0.18}{0.48} = \frac{3}{8}$$

נימוק

(4) (א) טענה

$$AO = OF = OD = r \quad (1)$$

נובע מהנתונים ש-O מרכז המעגל

החוסם את $\triangle ADF$ ו- $OD = r$.

$$AB = AF + BF \quad (2)$$

חיבור קטעים.

$$AF = AO + OF \quad (3)$$

חיבור קטעים.

$$AB = 2r + 2r = 4r \quad (4)$$

נובע מ-(1), (2), (3)

ומהנתון $BF = 2OD$.

$$BC = 4r \quad (5)$$

נובע מ-(4) ומהנתון כי $\triangle ABC$

הוא משולש שווה-צלעות.

$$EB = 2r \quad (6)$$

נובע מ-(5) ומהנתון $BC = 2EB$.

$$BF = 2r \quad (7)$$

נובע מהנתונים $OD = r$, $BF = 2OD$.

$$EB = BF \quad (8)$$

נובע מ-(6) ומ-(7).

$\triangle BEF$ הוא משולש שווה שוקיים.

נימוק

(ב) טענה

$$\angle BAC = \angle ABC = \angle ACB = 60^\circ \quad (9)$$

נובע מהנתון ש- $\triangle ABC$ הוא

משולש שווה-צלעות ומכך

שבמשולש מול צלעות שוות

מונחות זוויות שוות ושכוכם

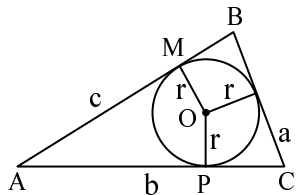
הזוויות במשולש הוא 180° .

המשך בעמוד הבא <<<

- (10) $\angle ADO = 60^\circ$ נובע מ- (9) ומהנתון ש- O מרכז המעגל החוסם את $\triangle ADF$, $OD = OA$ כרדיוסים במעגל ושבמשולש מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות.
- (11) $OD \parallel BC$ נובע מ- (9) , (10) ומכך שאם זוויות מתאימות שוות אז הישרים מקבילים.
- (12) $\frac{AD}{DC} = \frac{AO}{OB}$ לפי תאלס ו- (11).
- (13) $OB = 3r$ לפי (1) , (7) וחיבור קטעים $OB = OF + BF$
- (14) $AD = r$ נובע מ- (9) , (10) , מסכום זוויות במשולש הוא 180° , ומכך שבמשולש מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות.
- (15) $\frac{AD}{DC} = \frac{r}{3r} = \frac{1}{3}$ לפי (1) , (12) , (13) , (14).
- נימוק** (ג) **טענה**
- (16) $\angle AOD = 60^\circ$ נובע מ- (1) , (10) , (14) במשולש מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות.
- (17) $\angle DOF = 120^\circ$ נובע מ- (16) ומסכום זוויות צמודות שווה ל- 180° .
- (18) $\angle FBE = 120^\circ$ נובע מ- (9) ומסכום זוויות צמודות שווה ל- 180° .
- (19) $\angle OFD = \angle BFE$ זוויות קדקודיות שוות.
- (20) $\triangle BEF \sim \triangle ODF$ נובע מ- (17) , (18) , (19) וממשפט דמיון ז.ז.
- (21) $\frac{EF}{FD} = \frac{BE}{OD}$ נובע מ- (20) פרופורציית צלעות מתאימות במשולשים דומים.
- (22) $\frac{EF}{FD} = \frac{2r}{r} = 2$ נובע מ- (6) ומ- (21) ומהנתון $OD = r$.

המשך בעמוד הבא <<<

נימוק	טענה (ד)
נובע מ- (1), (3), (7).	$AF = 2r$, $BF = 2r$ (23)
נובע מהנתון ש- M מרכז המעגל החוסם את $\triangle ADE$.	$AM = ME$ (24)
נובע מ- (23), (24).	$\frac{AM}{ME} = \frac{AF}{BF} = 1$ (25)
נובע מ- (25) המשפט ההפוך למשפט תאלס.	$MF \parallel BE$ (26)
נובע מ- (11), (26) ומכך ששני ישרים המקבילים לישר שלישי מקבילים ביניהם.	$OD \parallel MF$ (27)
נימוק	טענה (ה)
לפי (27) ולפי משפט תאלס.	$\frac{MF}{EB} = \frac{AF}{AB}$ (28)
לפי (4), (6), (23), (28).	$\frac{MF}{2r} = \frac{2r}{4r} = \frac{1}{2}$ (29)
לפי (29).	$MF = \frac{1}{2} \cdot 2r = r$ (30)



$$S_{\triangle ABC} = S = S_{\triangle AOC} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle AOB} \quad (א) \quad (5)$$

$$S = \frac{AC \cdot OP}{2} + \frac{BC \cdot ON}{2} + \frac{AB \cdot OM}{2}$$

$$S = \frac{br}{2} + \frac{ar}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$$

$$r = \frac{2S}{a+b+c}$$

(ב) (i) נתון: c ס"מ $BA =$, לכן: $c - 14$ ס"מ $BC =$,

$\angle BAC = 26.384^\circ$, $AC = 12$ ס"מ.

לפי משפט הקוסינוסים ב- $\triangle ABC$:

$$(14 - c)^2 = c^2 + 12^2 - 2 \cdot c \cdot 12 \cdot \cos 26.384^\circ$$

$$196 - 28c + c^2 = c^2 + 144 - 21.5c$$

$$6.5c = 52 \Rightarrow c = AB = 8 \text{ ס"מ} \Rightarrow BC = 14 - 8 = 6 \text{ ס"מ}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} \sin \angle A = \frac{8 \cdot 12}{2} \sin 26.384^\circ \approx 21.33 \text{ סמ"ר} \quad (ii)$$

$$r = \frac{2 \cdot S_{\triangle ABC}}{a+b+c} = \frac{2 \cdot 21.33}{6+12+14} \approx 1.641 \text{ ס"מ} \quad (א) :$$

(6) (א) לפי משפט הקוסינוסים ב- $\triangle ADC$:

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cdot \cos \angle D$$

$$AC^2 = d^2 + a^2 - 2ad \cos \beta \quad (*)$$

נעביר $AK \perp DC$.

$$DK = \frac{DC - AB}{2} = \frac{a - b}{2}$$

$$\cos \beta = \frac{DK}{AD} \Rightarrow \cos \beta = \frac{a - b}{2d} \quad \text{במשולש ישר-זווית ADK} :$$

$$AC^2 = d^2 + a^2 - 2ad \cdot \frac{a - b}{2d} = \quad \text{נציב את הערך של } \cos \beta \text{ ב- } (*) :$$

$$= d^2 + a^2 - a^2 + ab = ab + d^2$$

$$AC = \sqrt{ab + d^2}$$

$$\angle BCD = \angle CDA = \beta \quad \text{(ב) (זווית בסיס שוות בטרפז שווה-שוקיים)}$$

$$\angle ACB = \beta - \alpha \quad \text{(חיסור זוויות)}$$

$$\frac{AB}{\sin \angle C} = \frac{BC}{\sin \angle A} \quad \text{לפי משפט הסינוסים ב- } \triangle ABC :$$

$$\frac{b}{\sin(\beta - \alpha)} = \frac{d}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin(\beta - \alpha)} = \frac{d}{b} \quad (**)$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \angle DAC = 180^\circ - \alpha - \beta = 90^\circ$$

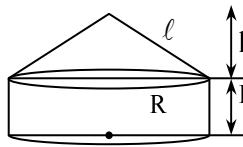
(סכום זוויות ב- $\triangle ACD$ שווה ל- 180°).

$$AD^2 + AC^2 = DC^2 \quad \text{לפי משפט פיתגורס ב- } \triangle ACD :$$

$$d^2 + ab + d^2 = a^2 \Rightarrow b = \frac{a^2 - 2d^2}{a}$$

נציב את הביטוי שקיבלנו ב- $(**)$ ונקבל:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin(\beta - \alpha)} = \frac{d}{\frac{a^2 - 2d^2}{a}} = \frac{ad}{a^2 - 2d^2}$$

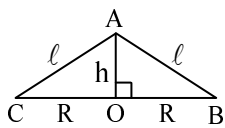


(7) נתון: $l = 9$ ס"מ, $H = 3$ ס"מ

פונקציית המטרה: $V = V_{\text{גליל}} + V_{\text{חרוט}}$

$$V = \pi R^2 H + \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

חתך החרוט הוא משולש שווה-שוקיים.



לפי משפט פיתגורס: $l^2 = h^2 + R^2 \Rightarrow h^2 = l^2 - R^2$

$$h = \sqrt{l^2 - R^2} = \sqrt{81 - R^2}$$

$$V = V(R) = \pi R^2 \cdot 3 + \frac{1}{3} \pi R^2 \sqrt{81 - R^2} = \frac{\pi R^2}{3} (9 + \sqrt{81 - R^2})$$

$$V'(R) = \frac{\pi}{3} \left[2R(9 + \sqrt{81 - R^2}) + R^2 \cdot \frac{-2R}{2\sqrt{81 - R^2}} \right]$$

$$V'(R) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{3} \left(18R + 2R\sqrt{81 - R^2} - \frac{R^3}{\sqrt{81 - R^2}} \right) = 0 \quad / \cdot \frac{\sqrt{81 - R^2}}{R}$$

$$18\sqrt{81 - R^2} + 162 - 2R^2 - R^2 = 0 \Rightarrow 18\sqrt{81 - R^2} = 3R^2 - 162 \quad / : 3$$

$$6\sqrt{81 - R^2} = R^2 - 54 \Rightarrow \begin{cases} R > \sqrt{54} = 3\sqrt{6} \\ R < 9 \end{cases} \Rightarrow 3\sqrt{6} < R < 9 \text{ ס"מ}$$

$$36(81 - R^2) = R^4 - 108R^2 + 2,916$$

$$R^4 - 72R^2 = 0 \Rightarrow R^2(R^2 - 72) = 0$$

$R = 0 \Rightarrow$ לא מתאים לפי נתוני השאלה

$$R^2 = \pm\sqrt{72}, \quad R > 0 \Rightarrow R = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \text{ ס"מ}$$

R	$R = 3\sqrt{6}$	$3\sqrt{6} < R < 6\sqrt{2}$	$R = 6\sqrt{2}$	$6\sqrt{2} < R < 9$	$R = 9$
$V'(R)$	נקודת אי-הגדרה	+	0	-	נקודת אי-הגדרה
$V(R)$		↗	max	↘	

$$V'(8) = (+)(18\sqrt{81 - 64} - 3 \cdot 8^2 + 162) > 0$$

$$V'(8.5) = (+)(18\sqrt{81 - 72.25} - 3 \cdot 8.5^2 + 162) < 0$$

$$R = 6\sqrt{2} \text{ ס"מ}$$

פונקציית המטרה מקבלת ערך מקסימלי עבור:

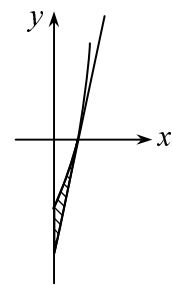
המשך בעמוד הבא <<<

הערך המקסימלי הוא :

$$V_{\max} = V(6\sqrt{2}) = \frac{\pi}{3} \cdot 72(9 + \sqrt{81 - 72}) = 24\pi(9 + 3) = 288\pi \text{ סמ"ק}$$

$$x \neq -3$$

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 4x - 6 \\ 2x^4 + 6x^3 + 4x^2 + 6x - 18 \quad | \quad x + 3 \\ \underline{2x^4 + 6x^3} \\ 4x^2 + 16x - 18 \\ \underline{-4x^2 + 12x} \\ -6x - 18 \\ \underline{-6x - 18} \\ 0 \end{array}$$



(8)

$$f(x) = \frac{2x^4 + 6x^3 + 4x^2 + 6x - 18}{x + 3} = 2x^3 + 4x - 6$$

$$f(1) = 2 + 4 - 6 = 0 \Rightarrow (1, 0)$$

שיעורי נקודת ההשקה :

$$f'(x) = 6x^2 + 4$$

(א)

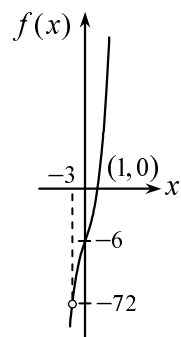
$$m_{\text{משיק}} = f'(1) = 6 \cdot 1^2 + 4 = 10$$

$$y = 10(x - 1) = 10x - 10$$

משוואת המשיק :

$$S = \int_0^1 (2x^3 + 4x - 6 - 10x + 10) dx = \int_0^1 (2x^3 - 6x + 4) dx =$$

$$= \left(\frac{x^4}{2} - 3x^2 + 4x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - 3 + 4 - (0 - 0 + 0) = 1.5 \text{ יחידות שטח}$$



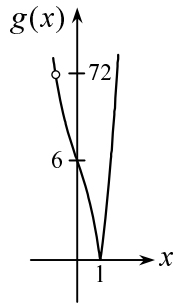
$$(i) \text{ לכל } x : f'(x) = 6x^2 + 4 > 0$$

כלומר הפונקציה עולה עבור $x < -3$, $x > -3$.

אין תחומי ירידה, אין נקודות קיצון.

$$\lim_{x \rightarrow -3} (2x^3 + 4x - 6) = -72 \quad (ii)$$

המשך בעמוד הבא <<<



$$g(x) = |f(x)| \Rightarrow \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ -f(x), & f(x) < 0 \end{cases} \quad (ג)$$

כלומר, כדי לבנות את גרף הפונקציה $g(x)$ יש להשאיר את החלק החיובי של הגרף של $f(x)$, ואת החלק השלילי יש לשקף על ציר ה- x . כך שמתקבל הגרף משמאל:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-a}}{cx^2}, \quad f(8) = \frac{\sqrt{2}}{8}, \quad f'(8) = 0 \quad (9)$$

$$f'(x) = \frac{1}{c} \cdot \frac{\frac{x^2}{2\sqrt{x-a}} - 2x\sqrt{x-a}}{x^4} = \frac{1}{c} \cdot \frac{x^2 - 4x^2 + 4ax}{2x^4\sqrt{x-a}} = \frac{4a-3x}{2cx^3\sqrt{x-a}} \quad (א)$$

$$f(8) = \frac{\sqrt{2}}{8} \Rightarrow \frac{\sqrt{8-a}}{64c} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$f'(8) = 0 \Rightarrow \frac{4a-24}{2c \cdot 8^3 \sqrt{8-a}} = 0 \Rightarrow 4a-24=0 \Rightarrow a=6$$

$$\frac{\sqrt{8-6}}{8c} = \sqrt{2} \Rightarrow 8c=1 \Rightarrow c=\frac{1}{8}$$

$$f'(x) = \frac{4(24-3x)}{x^3\sqrt{x-6}}, \quad f(x) = \frac{8\sqrt{x-6}}{x^2}$$

$$\begin{cases} x-6 \geq 0 \\ x^2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 6 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 6 \quad (ב) \text{ תחום ההגדרה:}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{12(8-x)}{x^3\sqrt{x-6}} = 0 \Rightarrow 12(8-x)=0 \Rightarrow x=8 \quad (ג)$$

מתאים לנקודה N , לגרף הפונקציה אין נקודות קיצון פנימיות נוספות

(חוץ מ- N).

$$x=6 \Rightarrow f(6)=0 \quad \text{נקודות קצה:}$$

כלומר $(6,0)$ נקודת מינימום מוחלט (כי $f(x) \geq 0$ לכל $x \geq 6$).

המשך בעמוד הבא <<<

(ד) משוואות האסימפטוטות:

אסימפטוטות אנכיות:

$x = 0$ לא בתחום ההגדרה, לכן אין אסימפטוטות אנכיות.

אסימפטוטות אופקיות:

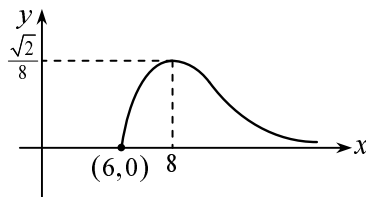
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8\sqrt{x-6}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8\sqrt{\frac{1}{x^3} - \frac{6}{x^4}}}{1} = 0 \Rightarrow y = 0$$

(ה) שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y :

$x = 0$ לא שייך לתחום ההגדרה, לכן אין נקודת חיתוך עם ציר ה- y .

שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x :

$$y = 0 \Rightarrow \frac{8\sqrt{x-6}}{x^2} = 0 \Rightarrow \sqrt{x-6} = 0 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow (6, 0)$$



(ו)

גבי יקואל

משוב צת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

♦ לכל הכיתות ♦ לכל השאלונים ♦ לכל הרמות