פתרון מבחן מס' 5 (ספר לימוד – שאלון 035806)

(1) נסמן ב- x שעות את משך הזמן שלוקח לצינור הראשון למלא מיכל ריק לבדו.

נסמן ב- y שעות את משך הזמן שלוקח לצינור השני למלא מיכל ריק לבדו.

אז במשך שעה אחת: הצינור הראשון ממלא $\frac{1}{x}$ מהמיכל.

הצינור השני ממלא $\frac{1}{y}$ מהמיכל.

על סמך נתוני השאלה אפשר להרכיב את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} 6\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1 \\ \frac{1}{x}\cdot\frac{y}{2}+\frac{1}{y}\cdot\frac{x}{3}=\frac{5}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6} \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{y}{x}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{y}=\frac{5}{6} \end{cases}$$

נסמן: $\frac{x}{y}=\text{t}$, ואז:

$$\frac{1}{3}\text{t}+\frac{1}{2\text{t}}=\frac{5}{6} \quad / \cdot 6\text{t}$$

$$2\text{t}^2-5\text{t}+3=0 \Rightarrow \text{t}_1=1 \ , \ \text{t}_2=\frac{3}{2}$$

$$\frac{x}{y}=1 \ , \ \frac{x}{y}=\frac{3}{2} \Rightarrow x=y \ , \ y=\frac{2}{3}x$$

נציב במשוואה הראשונה:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x}=\frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{1}{12} \Rightarrow x=12 \Rightarrow y=12$$

$$\frac{1}{x}+\frac{3}{2x}=\frac{1}{6} \Rightarrow \frac{5}{2x}=\frac{1}{6} \Rightarrow x=15 \Rightarrow y=10$$

שני הפתרונות מתאימים לשאלה, לכן שתי תשובות אפשריות:

① הצינור הראשון יכול למלא מיכל ריק לבדו ב- 12 שעות והשני ב- 12 שעות.

② הצינור הראשון יכול למלא מיכל ריק לבדו ב- 15 שעות והשני ב- 10 שעות.

(2) $\{a_n\}$ סדרה הנדסית ונסמן את מנתה ב- q .

(א) $$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ...... \cdot a_n = a_1 \cdot a_1 q \cdot a_1 q^2 \cdot ..... \cdot a_1 q^{n-1} =$$

$$= {a_1}^n \cdot q^{0+1+2+...+(n-1)} = {a_1}^n \cdot q^{\frac{(n-1)n}{2}} = \left({a_1}^2 \cdot q^{n-1}\right)^{\frac{n}{2}} =$$

$$= \left(a_1 \cdot a_1 \cdot q^{n-1}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(a_1 \cdot a_n\right)^{\frac{n}{2}}$$ מ.ש.ל.

הערה: $0+1+2+...+(n-1) = \frac{(n-1)n}{2}$ כסכום של n איברים

ראשונים בסדרה חשבונית שבה: $a_1 = 0$, $a_n = n-1$.

(ב) $$S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}$$

נוכיח, כי סדרת המחוברים של T_n היא סדרה הנדסית $\{b_n\}$.

$$b_1 = \frac{1}{a_1} \ , \ b_2 = \frac{1}{a_2} \ , \ b_3 = \frac{1}{a_3} \ , \ ... \ , \ b_n = \frac{1}{a_n}$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{1}{a_{n+1}}}{\frac{1}{a_n}} = \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{q} = const \ \Rightarrow$$ היא סדרה הנדסית $\{b_n\}$

$$T_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} = b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n =$$

$$= b_1 \frac{1 - {q^n}_{(b)}}{1 - q_{(b)}} = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1 - \frac{1}{q^n}}{1 - \frac{1}{q}} = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{q^n - 1}{q^n} \cdot \frac{q}{q-1} =$$

$$= \frac{1}{a_1} \cdot \frac{q^n - 1}{q^{n-1}(q-1)} = \frac{1}{a_n} \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$$

$$\left(\frac{S_n}{T_n}\right)^{\frac{n}{2}} = \left[\frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1} \cdot \frac{a_n \cdot (q-1)}{q^n - 1}\right]^{\frac{n}{2}} = \left(a_1 \cdot a_n\right)^{\frac{n}{2}} = P_n$$

$\left(a_1 \cdot a_n\right)^{\frac{n}{2}} = P_n$ לפי סעיף (א).

מ.ש.ל.

(3) נסמן:

$A =$ סטודנט שנבחר באקראי הוא בן.

$\overline{A} =$ סטודנט שנבחר באקראי הוא בת.

$B =$ סטודנט שנבחר באקראי סובל מרעש.

$\overline{B} =$ סטודנט שנבחר באקראי אינו סובל מרעש.

נתון: $P(A) = P(\overline{A})$ (כלומר $P(A) = P(\overline{A}) = 0.5$).

$$P(B \cap \overline{A}) = 4 \cdot P(B \cap A)$$

$$P(B / A) = 0.06$$

מכאן נסיק כי:

$$\frac{P(B \cap A)}{P(A)} = 0.06$$

$\Leftarrow$ $P(B \cap A) = 0.03$ $\Leftarrow$ $P(B \cap \overline{A}) = 0.12$.

ניעזר בטבלה הבאה ונשלים את שאר ההסתברויות.

		B סובל מרעש	**$\overline{B}$** אינו סובל מרעש	**סה"כ**
A	**סטודנט**	0.03	0.47	0.5
$\overline{A}$	**סטודנטית**	0.12	0.38	0.5
	סה"כ	0.15	0.85	1

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = 0.03 + 0.12 = 0.15$$

$$P(\overline{B}) = 1 - 0.15 = 0.85$$

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0.5 - 0.03 = 0.47$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) - P(\overline{A} \cap B) = 0.5 - 0.12 = 0.38$$

(א)

$$P(\overline{A} / B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{0.12}{0.15} = 0.8$$

(ב) לפנינו סעיף בנושא התפלגות בינומית.

נגדיר "הצלחה" = סטודנט שנבחר באקראי סובל מרעש.

לפי סעיף (א) נקבל כי ההסתברות להצלחה היא $P = 0.15$.

מספר הנסיונות (הסטודנטים שנבחרו באקראי) הוא $n = 5$.

המשך בעמוד הבא ⮜⮜⮜

ידוע כי מספר ההצלחות k מקיים: $k=3$ או $k=4$ או $k=5$.

וצריך למצוא את ההסתברות: $P(k=4 / k=3 \text{ או } k=4 \text{ או } k=5)$

$$P_5(3)=\binom{5}{3}0.15^3\cdot 0.85^2=0.024384375$$

$$P_5(4)=\binom{5}{4}0.15^4\cdot 0.85^1=0.0021515625$$

$$P_5(5)=\binom{5}{5}0.15^5\cdot 0.85^0=0.15^5=0.0000759375$$

$$P(k=4 / k=3 \text{ או } k=4 \text{ או } k=5)=$$

$$=\frac{P(k=4)\cap P(k=3 \text{ או } k=4 \text{ או } k=5)}{P(k=3 \text{ או } k=4 \text{ או } k=5)}=\frac{P(k=4)}{P(k=3 \text{ או } k=4 \text{ או } k=5)}=$$

$$=\frac{0.0021515625}{0.024384375+0.0021515625+0.0000759375}=\frac{255}{3,154}\approx 0.08085$$

(4) (א) ז. $\measuredangle AGB=\measuredangle AEC=90^\circ$ נתון.

ז. $\measuredangle GAB=\measuredangle CAE$ כל גודל שווה לעצמו.

$\Downarrow$

$\Delta AGB\sim\Delta AEC$ לפי משפט דמיון ז.ז.

$\Downarrow$

$\frac{AG}{AE}=\frac{AB}{AC}$ צלעות מתאימות במשולשים דומים מתייחסות באותו היחס.

$\Downarrow$

❶ $AB\cdot AE=AC\cdot AG$ מ.ש.ל (א)

(ב) ז. $\measuredangle AFC=\measuredangle CGB=90^\circ$ נתון.

ז. $\measuredangle FAC=\measuredangle ACB$ זוויות מתחלפות בין מקבילים $AD \parallel BC$ וחותך AC שוות זו לזו.

$\Downarrow$

$\Delta AFC\sim\Delta CGB$ לפי משפט דמיון ז.ז.

$\Downarrow$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

$\frac{AF}{CG} = \frac{AC}{CB}$ צלעות מתאימות במשולשים דומים

מתייחסות באותו היחס.

$$\Downarrow$$

❷ $BC \cdot AF = AC \cdot CG$ מ.ש.ל (ב)

(ג) נחבר את ❶+❷ :

$$+\begin{cases} AB \cdot AE = AC \cdot AG \\ BC \cdot AF = AC \cdot CG \end{cases}$$

$$AB \cdot AE + BC \cdot AF = AC(AG + GC) = AC \cdot AC = AC^2$$

(ד) (i) נתון : $AB = BC = CD = DA = a$, $CE = b$.

במעוין, האלכסונים חוצים את הזוויות ,

לכן AC חוצה-זווית $\measuredangle FAE$.

$CF = CE$ כל נקודה על חוצה-זווית נמצאת

במרחקים שווים משוקי הזווית.

$\measuredangle DFC = \measuredangle BEC = 90°$ נתון.

$DC = CB = a$ נתון.

$$\Downarrow$$

$\Delta CBE \cong \Delta CDF$ לפי משפט חפיפה צלע, צלע, זווית

מול הצלע הגדולה. מ.ש.ל

(ii) לפי משפט פיתגורס ב- ΔBCE :

$$BE^2 + EC^2 = BC^2 \quad \Rightarrow \quad BE^2 = a^2 - b^2$$

$$BE = DF = \sqrt{a^2 - b^2}$$

לפי סעיף (ג) :

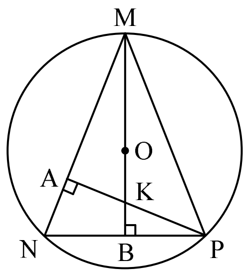
$$AC^2 = AB \cdot AE + BC \cdot AF =$$

$$= a(\sqrt{a^2 - b^2} + a) + a(\sqrt{a^2 - b^2} + a)$$

$$AC^2 = 2a(a + \sqrt{a^2 - b^2})$$

(5) הגובה MB לבסיס של משולש שווה-שוקיים הוא גם תיכון לבסיס וגם חוצה-זווית הראש, לכן:
$\measuredangle NMB = \measuredangle BMP = \alpha$.

BM הוא אנך אמצעי ל- NP , לכן הוא עובר דרך מרכז המעגל O .



(א) במשולש ישר-זווית APM סכום שתי זוויות חדות שווה ל- $90°$, לכן: $\measuredangle MPK = 90° - \measuredangle AMP = 90° - 2\alpha$

סכום הזוויות ב- ΔMKP שווה ל- $180°$, לכן:

$$\measuredangle MKP = 180° - \measuredangle KMP - \measuredangle MPK = 180° - \alpha - (90° - 2\alpha) = 90° + \alpha$$

ב- ΔMPK : $\measuredangle M = \alpha \ , \ \measuredangle P = 90° - 2\alpha \ , \ \measuredangle K = 90° + \alpha$

(ב) לפי משפט הסינוסים ב- ΔNMP :

$$\frac{MP}{\sin\measuredangle N} = 2R \quad \Rightarrow \quad MP = 2R\sin\measuredangle N$$

$$MP = 2R\sin(90° - \alpha) = 2R\cos\alpha$$

לפי משפט הסינוסים ב- ΔMPK :

$$\frac{MP}{\sin\measuredangle K} = \frac{KP}{\sin\measuredangle M}$$

$$KP = \frac{MP\sin\measuredangle M}{\sin\measuredangle K} = \frac{2R\cos\alpha\sin\alpha}{\sin(90° + \alpha)} = \frac{2R\cos\alpha\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2R\sin\alpha$$

$$\frac{MP}{\sin\measuredangle K} = \frac{MK}{\sin\measuredangle P}$$

$$MK = \frac{MP\sin\measuredangle P}{\sin\measuredangle K} = \frac{2R\cos\alpha\sin(90° - 2\alpha)}{\sin(90° + \alpha)} = \frac{2R\cos\alpha\cos 2\alpha}{\cos\alpha} = 2R\cos 2\alpha$$

(ג) **דרך ראשונה:**

$$S_{\Delta OPK} = \frac{OK \cdot KP}{2}\sin\measuredangle OKP = \frac{(MK - R) \cdot KP}{2}\sin(90° + \alpha) =$$

$$= \frac{(2R\cos 2\alpha - R) \cdot 2R\sin\alpha}{2} \cdot \cos\alpha =$$

$$= \frac{R^2(2\cos 2\alpha - 1) \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha}{2} = \frac{R^2\sin 2\alpha\,(2\cos 2\alpha - 1)}{2}$$

המשך בעמוד הבא >>>

דרך שנייה:

$$OM = OP = R \quad \Rightarrow \quad \measuredangle OMP = \measuredangle OPM = \alpha$$

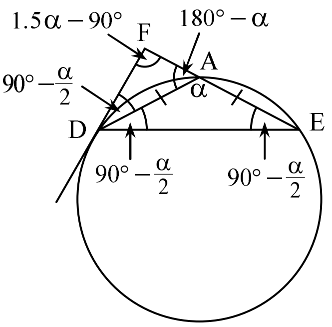
$$\measuredangle OPK = (90° - 2\alpha) - \alpha = 90° - 3\alpha$$

$\measuredangle KOP = 2\alpha$ (זווית חיצונית למשולש)

$$S_{\Delta OPK} = \frac{OP^2 \sin \measuredangle KOP \cdot \sin \measuredangle OPK}{2 \sin \measuredangle OKP} = \frac{R^2 \sin 2\alpha \, \sin(90° - 3\alpha)}{2\sin(90° + \alpha)} =$$

$$= \frac{R^2 \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha \cdot \cos 3\alpha}{2\cos\alpha} = R^2 \sin\alpha\cos 3\alpha$$

(6) (א) בעזרת הנתונים: $\measuredangle DAE = \alpha$,
משולש ADE הוא משולש
שווה-שוקיים (ולכן זוויות הבסיס
בו שוות) ושימוש במשפטים:
סכום זוויות במשולש הוא $180°$,
זווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית
הנשענת על המיתר מצידו השני, ניתן לבטא
את כל הזוויות באמצעות α (ראו בסרטוט).



באמצעות משפט הסינוסים במשולש ADE :

$$\frac{AD}{\sin(90° - \frac{\alpha}{2})} = 2R$$

כלומר,
$$AD = 2R\sin(90° - \frac{\alpha}{2}) = 2R\cos\frac{\alpha}{2}$$

באמצעות משפט הסינוסים ב- ΔADF :

$$\frac{AD}{\sin(1.5\alpha - 90°)} = \frac{DF}{\sin(180° - \alpha)}$$

כלומר:
$$\frac{2R\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin(1.5\alpha - 90°)} = \frac{DF}{\sin\alpha}$$

ואז:
$$DF = \frac{2R\cos\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}{\sin(1.5\alpha - 90°)}$$

המשך בעמוד הבא ▶▶▶

מכאן נקבל:

$$S_{\Delta ADF}=\frac{AD\cdot DF\cdot \sin(90^\circ-\frac{\alpha}{2})}{2}=\frac{2R\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2R\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin(1.5\alpha-90^\circ)}=$$

$$=\frac{2R^2\cos^3(\frac{\alpha}{2})\cdot\sin\alpha}{\sin(1.5\alpha-90^\circ)}=\frac{2R^2\cos^3(\frac{\alpha}{2})\cdot\sin\alpha}{\cos[90^\circ-(1.5\alpha-90^\circ)]}=$$

$$=\frac{2R^2\cos^3(\frac{\alpha}{2})\cdot\sin\alpha}{\cos(180^\circ-1.5\alpha)}=\frac{-2R^2\cos^3(\frac{\alpha}{2})\cdot\sin\alpha}{\cos(1.5\alpha)}$$

(ב)

$$S_{\Delta ADE}=\frac{AD\cdot AE\cdot\sin\alpha}{2}=\frac{(AD)^2\sin\alpha}{2}=\frac{(2R\cos\frac{\alpha}{2})^2\sin\alpha}{2}=$$

$$=2R^2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin\alpha$$

מכאן נקבל:

$$\frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ADF}}=\frac{2R^2\cos^2(\frac{\alpha}{2})\cdot\sin\alpha}{\frac{-2R^2\cos^3(\frac{\alpha}{2})\cdot\sin\alpha}{\cos(1.5\alpha)}}=-\frac{\cos1.5\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

(ג) נתון $S_{\Delta ADE}=S_{\Delta ADF}$.

כלומר: $\frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ADF}}=1$

ניעזר בתשובה מסעיף (ב) ונקבל:

$$1=-\frac{\cos1.5\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}\ \Rightarrow\ \cos\frac{\alpha}{2}=-\cos1.5\alpha\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \cos\frac{\alpha}{2}=\cos(180^\circ-1.5\alpha)$$

מכאן נקבל:

$$\frac{\alpha}{2}=-180^\circ+1.5\alpha+360^\circ n \quad \text{או} \quad \frac{\alpha}{2}=180^\circ-1.5\alpha+360^\circ n$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\alpha=-360^\circ+3\alpha+720^\circ n \quad \text{או} \quad \alpha=360^\circ-3\alpha+720^\circ n$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\alpha=180^\circ+360^\circ n \quad \text{או} \quad \alpha=90^\circ+180^\circ n$$

בתחום $60^\circ<\alpha<180^\circ$ נקבל את הפתרון $\alpha=90^\circ$.

(7) נסמן: $f'(x) = g(x)$, אז: $f''(x) = g'(x)$.

(א) בנקודות הקיצון של פונקציה I ($x = 2$, $x = 0.8$, $x = -1.3$)
הערך של פונקציה II הוא 0 .
כאשר פונקציה I עולה ($-1.3 < x < 0.8$, $x > 2$), פונקציה II חיובית,
וכאשר פונקציה I יורדת ($x < -1.3$, $0.8 < x < 2$),
פונקציה II שלילית.
לכן, גרף I מתאים ל- $g(x)$, כלומר ל- $f'(x)$,
וגרף II מתאים ל- $g'(x)$, כלומר ל- $f''(x)$.

(ב) נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ – הנקודות בהן $f'(x)$ מתאפסת
ומחליפה את סימנה: $x_{\min} = 0$, $x_{\max} = -2$
(בנקודה $x = 2$ פונקציה I לא מחליפה את סימנה).

(ג) $x = -1.3$, $x = 0.8$, $x = 2$, שיעורי ה- x של נקודות הפיתול
של $f(x)$, כי בנקודות אלו $f''(x) = 0$ ומחליפה את סימנה.

(ד)
$$S_1 = \int_0^{0.8} f''(x)\,dx = f'(x)\Big|_0^{0.8} = f'(0.8) - f'(0) =$$
$$= f'(0.8) - 0 = f'(0.8)$$
$$S_2 = -\int_{0.8}^{2} f''(x)\,dx = -f'(x)\Big|_{0.8}^{2} = -f'(2) + f'(0.8) =$$
$$= 0 + f'(0.8) = f'(0.8)$$

כלומר, $S_1 = S_2$.

(8) (א) $f'(x)=2\mathrm{a}\sin x\cdot\cos x-\mathrm{b}=\mathrm{a}\sin 2x-\mathrm{b}$

$f'\left(\frac{5\pi}{12}\right)=0 \;\Rightarrow\; \mathrm{a}\sin\frac{5\pi}{6}-\mathrm{b}=0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}\mathrm{a}-\mathrm{b}=0 \;\Rightarrow\; \mathrm{a}=2\mathrm{b}$

(ב) $f'(x)=0 \Rightarrow \mathrm{a}\sin 2x-\mathrm{b}=0 \Rightarrow 2\mathrm{b}\sin 2x-\mathrm{b}=0 \quad /:\mathrm{b}>0$

$2\sin 2x-1=0 \;\Rightarrow\; \sin 2x=\frac{1}{2}$

$2x=\frac{\pi}{6}+2\pi\mathrm{n} \;\Rightarrow\; x=\frac{\pi}{12}+\pi\mathrm{n}\ ,\ \mathrm{n}\in\mathbb{Z}$

$2x=\pi-\frac{\pi}{6}+2\pi\mathrm{k} \;\Rightarrow\; x=\frac{5\pi}{12}+\pi\mathrm{k}\ ,\ \mathrm{k}\in\mathbb{Z}$

בקטע $[0,2\pi]$ נמצאות הנקודות החשודות לקיצון הבאות:

$x=\frac{\pi}{12}\ ,\ x=\frac{13\pi}{12}\ ,\ x=\frac{5\pi}{12}\ ,\ x=\frac{17\pi}{12}$

נתייחס גם לקצוות התחום, כלומר גם לנקודות $x=2\pi\ ,\ x=0$.

$f''(x)=2\mathrm{a}\cos 2x\ ,\ \mathrm{a}>0$

$f(0)=0 \quad , \quad f(2\pi)=\mathrm{b}(\sin^2 2\pi-2\pi)=-6.28\mathrm{b}$

$f''\left(\frac{\pi}{12}\right)=(+)\cdot\cos\frac{\pi}{6}>0 \;\Rightarrow\; x_{\min}=\frac{\pi}{12}$

$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\mathrm{b}\left(\sin^2\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{12}\right)=-0.128\mathrm{b}$

$f''\left(\frac{5\pi}{12}\right)=(+)\cdot\cos\frac{5\pi}{6}<0 \;\Rightarrow\; x_{\max}=\frac{5\pi}{12}$

$f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\mathrm{b}\left(\sin^2\frac{5\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}\right)=0.557\mathrm{b}$

$f''\left(\frac{13\pi}{12}\right)=(+)\cdot\cos\frac{13\pi}{6}>0 \;\Rightarrow\; x_{\min}=\frac{13\pi}{12}$

$f\left(\frac{13\pi}{12}\right)=\mathrm{b}\left(\sin^2\frac{13\pi}{12}-\frac{13\pi}{12}\right)=-3.269\mathrm{b}$

$f''\left(\frac{17\pi}{12}\right)=(+)\cdot\cos\frac{17\pi}{6}<0 \;\Rightarrow\; x_{\max}=\frac{17\pi}{12}$

$f\left(\frac{17\pi}{12}\right)=\mathrm{b}\left(\sin^2\frac{17\pi}{12}-\frac{17\pi}{12}\right)=-2.585\mathrm{b}$

מכאן נובע ש- $x_{\min}=2\pi\ ,\ x_{\max}=0$.

תחומי עלייה: $\frac{1}{12}\pi<x<\frac{5}{12}\pi\ ,\ \frac{13}{12}\pi<x<\frac{17}{12}\pi$

תחומי ירידה: $0\le x<\frac{1}{12}\pi\ ,\ \frac{5}{12}\pi<x<\frac{13}{12}\pi\ ,\ \frac{17}{12}\pi<x\le 2\pi$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

ג) $\varphi(x)=2\sin^2 x-x$. הפונקציה $\varphi(x)$ מתקבלת מהפונקציה $f(x)$ עבור $a=2>0$.

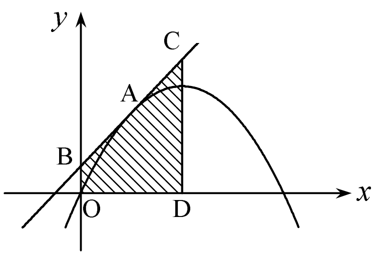
בתחום $\frac{\pi}{5}\le x\le\frac{7\pi}{12}$ הפונקציה עולה עבור $\frac{\pi}{5}\le x<\frac{5\pi}{12}$ ויורדת עבור $\frac{5\pi}{12}<x\le\frac{7\pi}{12}$.

$$\varphi\left(\frac{\pi}{5}\right)=2\sin^2\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{5}\approx 0.0627>0$$

$$\varphi\left(\frac{7\pi}{12}\right)=2\sin^2\frac{7\pi}{12}-\frac{7\pi}{12}\approx 0.0334>0$$

לכן, $2\sin^2 x-x>0$ לכל x בתחום, כלומר $2\sin^2 x>x$ לכל x בתחום $\left[\frac{\pi}{5},\frac{7\pi}{12}\right]$.

(9) נסמן: $x_A=t$, ואז: $y_A=2t-t^2$



$$y'=-2x+2$$

$$m_A=-2t+2$$

משוואת המשיק בנקודה A :

$$y-(2t-t^2)=(-2t+2)(x-t)$$

$$y=(-2t+2)x+t^2$$

הנקודה B : $x=0 \Rightarrow y=t^2$

הנקודה A : $x=1 \Rightarrow y=t^2-2t+2$

פונקציית המטרה – שטח הטרפז BCDO .

$$S=\frac{OB+DC}{2}\cdot OD=\frac{y_B+y_C}{2}\cdot x_D=$$

$$=\frac{t^2+(t^2-2t+2)}{2}\cdot 1=t^2-t+1$$

$$S'=2t-1\ ,\ S'=0 \Rightarrow 2t-1=0 \Rightarrow t=\frac{1}{2}$$

$$S''=2 \Rightarrow \min$$

$$x_A=\frac{1}{2} \Rightarrow y_A=-\frac{1}{4}+1=\frac{3}{4}$$

אם נעביר משיק בנקודה $A\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$, שטח הטרפז BCDO יהיה מינימלי.

גבי יקואל

משבצת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

◈ לכל הכיתות ◈ לכל השאלונים ◈ לכל הרמות