

פתרון מבחן מס' 4 (ספר לימוד – שאלון 035806)

(1) נסמן:

 y קמ"ש: מהירות הזרם, x קמ"ש: מהירות ספינה עם מנוע קטן במים עומדים.

מכאן:

 $(x + y)$ קמ"ש: מהירות ספינה עם מנוע קטן בכיוון הזרם, $(x - y)$ קמ"ש: מהירות ספינה עם מנוע קטן נגד הזרם, $3x$ קמ"ש: מהירות ספינה עם מנוע גדול במים עומדים, $(3x + y)$ קמ"ש: מהירות ספינה עם מנוע גדול בכיוון הזרם, $(3x - y)$ קמ"ש: מהירות ספינה עם מנוע גדול נגד הזרם.

לפי תנאי השאלה, אפשר להרכיב את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 4(x + y) = 6(x - y) & /:2 \\ \frac{3}{4} = \frac{12}{3x + y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 3x - 3y \\ 3x + y = 16 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 5y \\ 3x + y = 16 \end{cases} \Rightarrow 15y + y = 16 \Rightarrow 16y = 16 \Rightarrow y = 1$$

תשובה: מהירות הזרם היא 1 קמ"ש.

(2) $0 < q < 1$, $a_1 > 0$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad S = \frac{a_1}{1 - q}$$

$$b_n = S - S_n = \frac{a_1}{1 - q} \cdot [1 - (1 - q^n)] \quad : \{b\} \text{ בסדרה החדשה}$$

$$b_n = \frac{a_1 q^n}{1 - q}$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_1 q^{n+1}}{1 - q} \cdot \frac{1 - q}{a_1 q^n} = q = \text{const} \quad (\text{א})$$

כלומר הסדרה $\{b\}$ היא סדרה הנדסית., $0 < q < 1$, לכן היא גם סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת.

<<< המשך בעמוד הבא

$$\begin{cases} S = 243 \\ S_2 = 216 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a_1}{1-q} = 243 \\ a_1 + a_1q = 216 \end{cases} \Rightarrow : \begin{cases} \frac{a_1}{1-q} = 243 \\ a_1(1+q) = 216 \end{cases} \quad (\text{ב})$$

$$\frac{a_1}{(1-q) \cdot a_1(1+q)} = \frac{243}{216} \Rightarrow \frac{1}{1-q^2} = \frac{9}{8}$$

$$8 = 9 - 9q^2 \Rightarrow q^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow q = \pm \frac{1}{3}$$

נתון $0 < q < 1$, לכן: $q = \frac{1}{3}$.

$$a_1 \left(1 + \frac{1}{3}\right) = 216 \Rightarrow \frac{4}{3}a_1 = 216 \Rightarrow a_1 = 162$$

$$S_b = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\frac{a_1 \cdot q^1}{1-q}}{1-q} = \frac{a_1q}{(1-q)^2} = \frac{162 \cdot \frac{1}{3}}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{54 \cdot 9}{4} = 121.5$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (\text{א}) \quad (3)$$

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(A \cap B) = 1$$

$$\begin{cases} P(A) + P(B) = 1 \\ P(A) - P(B) = 0.3 \end{cases}$$

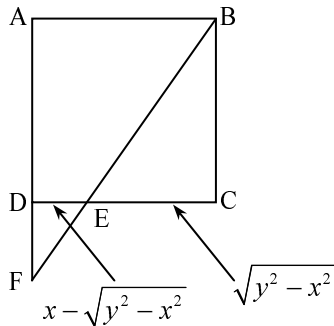
$$P(A) = \frac{1+0.3}{2} = 0.65, \quad P(B) = 1 - P(A) = 0.35 \quad \text{נקבל:}$$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.35 = 0.65 \quad \text{מכאן:}$$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0.35 - [P(A) - P(C)] = \quad (\text{ב}) \quad (i)$$

$$= 0.35 - (0.65 - 0.4) = 0.35 - 0.25 = 0.1$$

$$P(\bar{A} \cup B) = 1 - P(A) + P(A \cap B) = 1 - 0.65 + 0.25 = 0.6 \quad (ii)$$



(4) (א) ניעזר בכך ש-ABCD ריבוע,

נסמן: $BE = y$, $AB = x$

ונשתמש במשפט פיתגורס, כדי להביע קטעים

נוספים באמצעות x ו- y (ראו סרטוט).

לפי משפט פיתגורס ב- $\triangle BCE$,

נקבל: $EC = \sqrt{y^2 - x^2}$.

מחיסור קטעים נקבל: $DE = x - \sqrt{y^2 - x^2}$

$\triangle DEF \sim \triangle CEB$ לפי משפט ז.ז. ($\angle FDE = \angle BCE = 90^\circ$,

$\angle DEF = \angle BEC$ כזוויות קדקודיות), ומכאן:

$$\frac{EF}{EB} = \frac{DE}{CE} \Rightarrow \frac{EF}{y} = \frac{x - \sqrt{y^2 - x^2}}{\sqrt{y^2 - x^2}}$$

$$EF = \frac{y(x - \sqrt{y^2 - x^2})}{\sqrt{y^2 - x^2}} = \frac{yx}{\sqrt{y^2 - x^2}} - y \quad \text{כלומר:}$$

$$BF = BE + EF = y + \frac{yx}{\sqrt{y^2 - x^2}} - y = \frac{yx}{\sqrt{y^2 - x^2}} \quad \text{ואז:}$$

$$\frac{1}{BF^2} = \frac{1}{\left(\frac{yx}{\sqrt{y^2 - x^2}}\right)^2} = \frac{1}{\frac{x^2 y^2}{y^2 - x^2}} = \frac{y^2 - x^2}{x^2 y^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \quad \text{כלומר:}$$

$$\frac{1}{AB^2} = \frac{1}{BE^2} + \frac{1}{BF^2} \quad \text{ואז:}$$

(ב) אם שטח $\triangle DEF$ הוא 2 סמ"ר,

הרי ששטח $\triangle BCE$ הדומה לו

עם יחס דמיון 2, הוא:

$$S_{\triangle BCE} = 2 \cdot (\text{יחס הדמיון})^2 = 2 \cdot 2^2 = 8 \text{ סמ"ר}$$

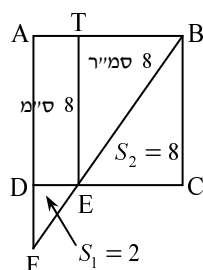
נעלה אנך מ- E ל- AB .

$$\cdot S_{\triangle TEB} = 8 \text{ סמ"ר}, \text{ ולכן } \triangle TEB \cong \triangle CBE$$

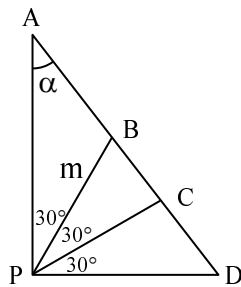
כמו כן, מכיוון ש- $CE = 2 \cdot DE$ ו- $TE = BC$

$$\cdot S_{\triangle TED} = \frac{1}{2} \cdot S_{\triangle TBE} = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8 \text{ סמ"ר}$$

כלומר, שטח הריבוע ABCD הוא 24 סמ"ר = $3 \cdot 8$.



(5) שאלות המשלבות גיאומטריה + טריגונומטריה הורדו מתוכנית הלימודים.



(6) (א) לפי משפט הסינוסים ב- ΔAPB :

$$\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{PB}{\sin \angle A} \Rightarrow AB = \frac{m \cdot \frac{1}{2}}{\sin \alpha} = \frac{m}{2 \sin \alpha}$$

$\angle PBC = \alpha + 30^\circ$ (זווית חיצונית ל- ΔABP).

לפי משפט הסינוסים ב- ΔPBC :

$$\frac{PC}{\sin \angle PBC} = \frac{PB}{\sin \angle BCP} \Rightarrow PC = \frac{m \sin(\alpha + 30^\circ)}{\sin(120^\circ - \alpha)}$$

לפי משפט הסינוסים ב- ΔAPC :

$$\frac{AC}{\sin 60^\circ} = \frac{PC}{\sin \angle A}$$

$$AC = \frac{m \sin(\alpha + 30^\circ)}{\sin(120^\circ - \alpha)} \cdot \frac{\sin 60^\circ}{\sin \alpha} = \frac{m \sqrt{3} \sin(\alpha + 30^\circ)}{2 \sin \alpha \sin(120^\circ - \alpha)}$$

לפי משפט הסינוסים ב- ΔPBD :

$$\frac{BD}{\sin 60^\circ} = \frac{PB}{\sin \angle D}$$

$$BD = \frac{m \sin 60^\circ}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{m \sqrt{3}}{2 \cos \alpha}$$

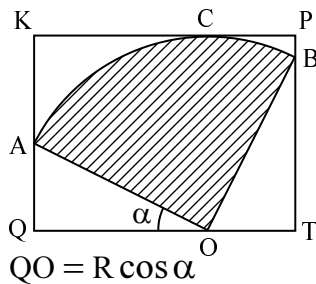
לפי משפט הסינוסים ב- ΔPCD :

$$\frac{CD}{\sin 30^\circ} = \frac{PC}{\sin \angle D}$$

$$CD = \frac{m \sin(\alpha + 30^\circ)}{\sin(120^\circ - \alpha)} \cdot \frac{\sin 30^\circ}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{m \sin(\alpha + 30^\circ)}{2 \cos \alpha \sin(120^\circ - \alpha)}$$

(ב) לפי סעיף (א) :

$$\frac{AC \cdot BD}{AB \cdot CD} = \frac{\frac{m \sqrt{3} \sin(\alpha + 30^\circ)}{2 \sin \alpha \sin(120^\circ - \alpha)} \cdot \frac{m \sqrt{3}}{2 \cos \alpha}}{\frac{m}{2 \sin \alpha} \cdot \frac{m \sin(\alpha + 30^\circ)}{2 \cos \alpha \sin(120^\circ - \alpha)}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$$



(7) $OC \perp KP$ (רדיוס לנקודת השקה מאונך למשיק)

$$OC = KQ = PT = R$$

פונקציית המטרה: $S_{KPTQ} = QT \cdot KQ$

$$\angle BOT = 180^\circ - \alpha - 90^\circ = 90^\circ - \alpha$$

במשולש ישר-זווית $\triangle AQO$: $QO = R \cos \alpha$

במשולש ישר-זווית $\triangle BTO$: $OT = R \cos(90^\circ - \alpha) = R \sin \alpha$

$$QT = QO + OT = R \cos \alpha + R \sin \alpha = R(\cos \alpha + \sin \alpha)$$

לכן, פונקציית המטרה:

$$S(\alpha) = R(\cos \alpha + \sin \alpha) \cdot R = R^2(\sin \alpha + \cos \alpha)$$

$$S'(\alpha) = R^2(\cos \alpha - \sin \alpha)$$

$$S'(\alpha) = 0 \Rightarrow R^2(\cos \alpha - \sin \alpha) = 0$$

$$\cos \alpha - \sin \alpha = 0 \Rightarrow \cos \alpha = \sin \alpha$$

$\cos \alpha = 0$ אינו פתרון של המשוואה, לכן קביעת $\cos \alpha \neq 0$ אינה פוסלת

את הפתרון. נחלק ב- $\cos \alpha \neq 0$, ונקבל:

$$1 = \tan \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

נבדוק את סוג הקיצון:

α	$\alpha < 45^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha > 45^\circ$
$S'(\alpha)$	+	0	-
$S(\alpha)$	↗	max	↘

$$S'(\frac{\pi}{6}) = (+) \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}) > 0 \quad S'(\frac{\pi}{3}) = (+) \cdot (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}) < 0$$

עבור $\alpha = 45^\circ$ שטח המלבן הוא מקסימלי ושווה ל:

$$S_{\max} = R^2(\sin 45^\circ + \cos 45^\circ) = R^2(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}) = R^2\sqrt{2}$$

$$a \neq 0, f(x) = \frac{ax}{x^2 - 4} \quad (8)$$

$$x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 4 \Rightarrow x \neq \pm 2 \quad \text{תחום הגדרה:}$$

$$f'(x) = a \cdot \frac{1 \cdot (x^2 - 4) - 2x \cdot x}{(x^2 - 4)^2} = a \cdot \frac{-x^2 - 4}{(x^2 - 4)^2} \quad (א)$$

לכל x בתחום ההגדרה מתקיים:

$$\begin{cases} (x^2 - 4)^2 > 0 \\ -x^2 - 4 < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{-x^2 - 4}{(x^2 - 4)^2} < 0$$

מכאן, אם $a > 0$ אז $f'(x) < 0$, לכן הפונקציה יורדת לכל x בתחום ההגדרה, ואם $a < 0$ אז $f'(x) > 0$, לכן הפונקציה עולה לכל x מתחום ההגדרה.

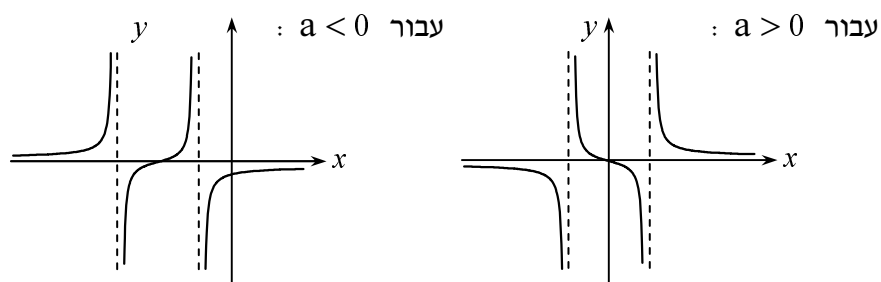
(ב) + (ג)

לגרף הפונקציה יש אסימפטוטות אנכיות שמשוואותיהן $x = \pm 2$, ואסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y = 0$, כי:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{a}{x}}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{0}{1 - 0} = \frac{0}{1} = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0, 0) \quad \text{בנוסף:}$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0, 0)$$



$$f(x) = \sqrt{-x-9} \Rightarrow -x-9 \geq 0 \Rightarrow x \leq -9 \quad (9) \text{ (א)}$$

מכאן ש- $f(x) \geq 0$ לכל x מתחום הגדרתה.

$$g(x) = -\sqrt{x-9} \Rightarrow x-9 \geq 0 \Rightarrow x \geq 9$$

מכאן ש- $g(x) \leq 0$ לכל x מתחום הגדרתה.

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{-x-9}} \Rightarrow m_A = -\frac{1}{2\sqrt{-x_0-9}} \quad (i) \text{ (ב)}$$

$$g'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x-9}} \Rightarrow m_B = -\frac{1}{2\sqrt{x_B-9}}$$

$$m_A = m_B \Rightarrow -\frac{1}{2\sqrt{-x_0-9}} = -\frac{1}{2\sqrt{x_B-9}}$$

$$-x_0 - 9 = x_B - 9$$

$$x_B = -x_0 \Rightarrow y_B = -\sqrt{-x_0-9}$$

כלומר: $B(-x_0, -\sqrt{-x_0-9})$.

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{\sqrt{-x_0-9} + \sqrt{-x_0-9}}{x_0 + x_0} = \frac{\sqrt{-x_0-9}}{x_0} \quad (ii)$$

$$\frac{\sqrt{-x_0-9}}{x_0} = -\frac{1}{2\sqrt{-x_0-9}} \Rightarrow 2(-x_0-9) = -x_0$$

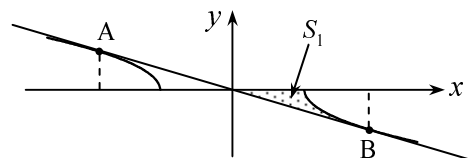
$$x_0 = -18 \Rightarrow B(18, -3)$$

$$m_{AB} = \frac{\sqrt{-x_0-9}}{x_0} = \frac{\sqrt{18-9}}{-18} = -\frac{1}{6} \quad (ג)$$

$$y + 3 = -\frac{1}{6}(x - 18) \Rightarrow y = -\frac{x}{6} \quad \text{משוואת המשיק AB} :$$

השטח S_1 מסתובב סביב ציר ה- x , לכן :

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \int_0^{-x_0} y^2 dx - \pi \cdot \int_9^{-x_0} [g(x)]^2 dx = \\ &= \pi \cdot \int_0^{18} \frac{x^2}{36} dx - \pi \cdot \int_9^{18} (x-9) dx = \\ &= \pi \cdot \left[\left(\frac{x^3}{108} \right) \Big|_0^{18} - \left(\frac{x^2}{2} - 9x \right) \Big|_9^{18} \right] = \end{aligned}$$



◀◀◀ המשך בעמוד הבא

$$\begin{aligned} &= \pi \cdot \left[54 - 0 - \left[162 - 162 - \left(\frac{81}{2} - 81 \right) \right] \right] = \\ &= \pi \cdot (54 - 40.5) = 13.5\pi \text{ יחידות נפח} \end{aligned}$$

גבי יקואל

מ ש ב צ ת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

לכל הכיתות ✦ לכל השאלונים ✦ לכל הרמות