

פתרון מבחן מס' 3 (ספר לימוד – שאלון 035806)

(1) נסמן ב- x שעות את הזמן שבו צינור I יכול למלא את הבריכה לבדו

וב- y שעות את הזמן שבו צינור II יכול למלא את הבריכה לבדו.

מכאן, בשעה אחת, צינור I ממלא $\frac{1}{x}$ של הבריכה

וצינור II ממלא $\frac{1}{y}$ של הבריכה.

(א) (i) לפני נתוני השאלה ניתן להרכיב את המשוואה:

$$\begin{cases} 4\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1 & \text{ב- 4 שעות שני הצינורות יחד ממלאים את כל הבריכה} \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{6} = m & \text{כל צינור ממלא שישית בריכה, זה אחר זה, והם עובדים יחד בסך הכול m שעות.}\end{cases}$$

$$y = 6m - x \Rightarrow \frac{4}{x} + \frac{4}{6m-x} = 1$$

$$24m - 4x + 4x = 6mx - x^2 \Rightarrow x^2 - 6mx + 24m = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{6m \pm \sqrt{36m^2 - 96m}}{2} = 3m \pm \sqrt{9m^2 - 24m}$$

(ii) כדי שלבעיה יהיה פתרון יחיד, נדרוש:

$$\Delta = 0 \Rightarrow x = y = 3m > 0 \Rightarrow 9m^2 - 24m = 0$$

$$3m(3m - 8) = 0 \Rightarrow m_1 = 0, m_2 = 2\frac{2}{3}$$

m הוא גודל חיובי, לכן: $m = 2\frac{2}{3}$.

$$\frac{3}{x} = 1 - 0.4 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow 3m \pm \sqrt{9m^2 - 24m} = 5 \quad (\text{ב})$$

$$\sqrt{9m^2 - 24m} = \pm(5 - 3m)$$

$$m > \frac{5}{3} \Rightarrow \sqrt{9m^2 - 24m} = -(5 - 3m)$$

$$m \leq \frac{5}{3} \Rightarrow \sqrt{9m^2 - 24m} = +(5 - 3m)$$

בשני המקרים, שני אגפי המשוואות הם חיוביים, לכן:

$$9m^2 - 24m = (5 - 3m)^2 \Rightarrow 9m^2 - 24m = 25 - 30m + 9m^2$$

$$6m = 25 \Rightarrow m = \frac{25}{6}$$

$$\frac{1}{a_3 a_4} = \frac{1}{a_1 a_5} + \frac{2}{a_2 a_3} \Rightarrow \frac{1}{a_1 \cdot q^2 \cdot a_1 \cdot q^3} = \frac{1}{a_1 \cdot a_1 \cdot q^4} + \frac{2}{a_1 \cdot q \cdot a_1 \cdot q^2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{a_1^2 \cdot q^5} = \frac{1}{a_1^2 \cdot q^4} + \frac{2}{a_1^2 \cdot q^3} \quad / \cdot a_1^2 q^5 \neq 0$$

$$1 = q + 2q^2 \Rightarrow 2q^2 + q - 1 = 0$$

$$q_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{4} \Rightarrow q_1 = \frac{1}{2}, q_2 = -1$$

$$\begin{cases} q = \frac{1}{2} \\ a_7 = \frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow a_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{8} \Rightarrow a_1 = 8 \quad \text{אפשרות ① :}$$

$$S_6 = 8 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 8 \cdot \frac{63}{32} = 15 \frac{3}{4}$$

$$\begin{cases} q = -1 \\ a_7 = \frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow S_6 = \frac{1}{7} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{7} = 0 \quad \text{אפשרות ② :}$$

(3) נתון ש- A , B ו- C שלושה מאורעות זרים המקיימים: $P(A \cup B \cup C) = 1$.

בנוסף נתון כי: $P(B) = 0.4$, $P(C) = 0.3$, $P(D / A) = 0.6$

$P(\bar{D} / C) = 0.4$, $P(B / \bar{D}) = 0.2$

כדאי להיעזר בטבלת ההסתברויות הבאה:

סה"כ	C	B	A	
0.7	0.18	0.34	0.18	D
0.3	0.12	0.06	0.12	$\bar{D}$
1	0.3	0.4	0.3	סה"כ

נסביר את מילוי ההסתברויות שאינן ידועות ישירות מהנתונים.

מכיון ש- A , B ו- C מאורעות זרים, ו- $P(A \cup B \cup C) = 1$,

הרי ש- $P(A) = 1 - 0.3 - 0.4 = 0.3$.

$$P(D / A) = 0.6 \Rightarrow \frac{P(A \cap D)}{P(A)} = 0.6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A \cap D) = 0.6 \cdot P(A) = 0.18$$

המשך בעמוד הבא <<<

$$P(A \cap \bar{D}) = P(A) - P(A \cap D) = 0.3 - 0.18 = 0.12$$

$$P(\bar{D} / C) = 0.4 \Rightarrow \frac{P(C \cap \bar{D})}{P(C)} = 0.4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(C \cap \bar{D}) = 0.4 \cdot P(C) = 0.12$$

$$P(C \cap D) = P(C) - P(C \cap \bar{D}) = 0.3 - 0.12 = 0.18$$

$$P(B / \bar{D}) = 0.2 \Rightarrow \frac{P(B \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = 0.2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(B \cap \bar{D}) = 0.2 \cdot P(\bar{D})$$

נסמן $P(\bar{D}) = x$, ואז $P(B \cap \bar{D}) = 0.2x$

$$P(\bar{D}) = P(A \cap \bar{D}) + P(B \cap \bar{D}) + P(C \cap \bar{D}) \quad \text{ניעזר בקשר:}$$

$$x = 0.12 + 0.2x + 0.12 \Rightarrow x = 0.3 \quad \text{ונקבל:}$$

כלומר: $P(\bar{D}) = 0.3$, $P(B \cap \bar{D}) = 0.06$

מכאן גם: $P(B) = 1 - 0.3 = 0.7$, ואז:

$$P(B \cap D) = P(B) - P(B \cap \bar{D}) = 0.4 - 0.06 = 0.34$$

(א) כאמור: $P(\bar{D}) = 0.3$

$$P(A / D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0.18}{0.7} \quad \text{וגם:} \quad P(C / D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{0.18}{0.7} \quad \text{(ב)}$$

לכן: $P(C / D) = P(A / D)$

$$P(D / C) = \frac{P(C \cap D)}{P(C)} = \frac{0.18}{0.3} = 0.6$$

$$P(D / A) = \frac{P(A \cap D)}{P(A)} = \frac{0.18}{0.3} = 0.6 \quad \text{וגם:}$$

לכן: $P(D / C) = P(D / A)$

$$P((A \cup C) / \bar{D}) = \frac{P((A \cup C) \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} \quad \text{(ג)}$$

מכיון ש- A ו- C מאורעות זרים, הרי ש:

$$P[(A \cup C) / \bar{D}] = \frac{P(A \cap \bar{D}) + P(C \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{0.12 + 0.12}{0.3} = \frac{0.24}{0.3} = 0.8$$

(4) נסמן: $AB = AC = a$, ואז: $AD = DB = \frac{1}{2}a$, $AE = \frac{2}{3}a$, $EC = \frac{1}{3}a$

$$(א) \quad DE \parallel KC \quad (\text{נתון})$$



$$(\text{לפי משפט תאלס}) \quad \frac{AD}{DK} = \frac{AE}{EC}$$



$$\frac{\frac{1}{2}a}{DK} = \frac{2}{1}$$



$$DK = \frac{1}{4}a$$

$$(\text{חיסור קטעים}) \quad KB = AB - AD - DK$$

$$KB = a - \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}a = \frac{1}{4}a$$



$$(\text{הצבה}) \quad KB = KD$$

(ב) KC הוא קטע אמצעים ב- $\triangle BDF$ (קטע החוצה צלע אחת במשולש

ומקביל לצלע שנייה הוא קטע אמצעים). לכן: $BC = CF$.

(ג) + (ד)

ב- $\triangle ABF$: AC ו- FD הם תיכונים (נתון + הוכחנו בסעיף (ב)).

לכן הנקודה E היא נקודת מפגש התיכונים ב- $\triangle ABF$,

ו- BH הוא גם תיכון (כל שלושת התיכונים במשולש נחתכים בנקודה אחת),

לכן: $AH = HF$.

$$(\text{נתון}) \quad CK \parallel FD$$

$$CM \parallel FE$$

$$(\text{הוכחנו בסעיף (ב)}) \quad BC = CF$$



$$CM \text{ קטע אמצעים ב- } \triangle BEF$$



המשך בעמוד הבא <<<

$BM = ME$ (קטע אמצעים במשולש הוא קטע המחבר

את אמצעי שתי צלעות במשולש)

E נקודת מפגש התיכונים ב- $\triangle ABF$ (הוכחנו)

$\Downarrow$

(תיכונים במשולש נפגשים בנקודה אחת) $\frac{BE}{EH} = \frac{2}{1}$

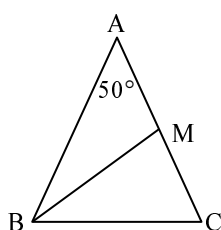
ומתחלקים בנקודה זו ביחס 2 : 1

כך שהקטע הגדול צמוד לקדקוד

נסמן: $EH = t$, ואז: $BE = 2t$, $BM = ME = t$,

כלומר: $BM = ME = EH$.

(5) שאלות המשלבות גיאומטריה + טריגונומטריה הורדו מתוכנית הלימודים.



(6) (א) ב- $\triangle ABM$ נסמן:

$\angle AMB = \alpha$, $AB = 2b$, $AM = b$

לפי משפט הסינוסים: $\frac{AM}{\sin \angle B} = \frac{AB}{\sin \angle M}$

$$\frac{b}{\sin(130^\circ - \alpha)} = \frac{2b}{\sin \alpha} \Rightarrow 2 \sin(130^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$2(\sin 130^\circ \cos \alpha - \sin \alpha \cos 130^\circ) = \sin \alpha$$

$$1.5321 \cos \alpha + 1.2856 \sin \alpha = \sin \alpha$$

$$0.2856 \sin \alpha = -1.5321 \cos \alpha \quad / : 0.2856 \cos \alpha \neq 0$$

$$\tan \alpha = -5.3645 \Rightarrow \alpha \approx 100.56^\circ$$

$$\angle BMC = 180^\circ - \angle AMB = 180^\circ - 100.56^\circ = 79.44^\circ$$

(ב) סכום הזוויות ב- $\triangle ABC$ שווה ל- 180° , לכן:

$$\angle B = \angle C = \frac{180^\circ - 50^\circ}{2} = 65^\circ$$

$$\frac{AB}{\sin \angle C} = 2R$$

לפי משפט הסינוסים ב- $\triangle ABC$:

המשך בעמוד הבא <<<

$$AB = 2R \sin \angle C = 2 \cdot 10 \cdot \sin 65^\circ \approx 18.126 \text{ ס"מ}$$

$$AM = MC = \frac{1}{2} \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 18.126 = 9.063 \text{ ס"מ}$$

$$\text{נתון: } 14 \text{ ס"מ} = r_{\Delta ABD}, \angle C = 65^\circ, \angle BMC = 79.44^\circ$$

$$\angle DBC = 180^\circ - 65^\circ - 79.44^\circ = 35.56^\circ$$

$$\angle DBA = \angle B - \angle DBC = 65^\circ - 35.56^\circ = 29.44^\circ$$

$$\frac{AD}{\sin \angle DBA} = 2r \quad \text{לפי משפט הסינוסים ב-} \Delta ABD$$

$$AD = 2r \sin \angle DBA = 2 \cdot 14 \cdot \sin 29.44^\circ = 13.762 \text{ ס"מ}$$

$$\angle AMD = \angle BMC = 79.44^\circ$$

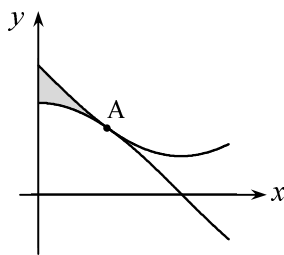
$$\frac{AD}{\sin \angle M} = \frac{AM}{\sin \angle D} \quad \text{לפי משפט הסינוסים ב-} \Delta AMD$$

$$\sin \angle D = \frac{AM \cdot \sin \angle M}{AD} = \frac{9.063 \cdot \sin 79.44^\circ}{13.762} = 0.6474$$

$$\angle ADM = 40.346^\circ$$

$$\angle MAD = 180^\circ - 79.44^\circ - 40.346^\circ = 60.214^\circ$$

$$S_{\Delta AMD} = \frac{AM \cdot AD}{2} \cdot \sin \angle MAD = \frac{9.063 \cdot 13.762}{2} \cdot \sin 60.214^\circ \approx 54.12 \text{ סמ"ר}$$



$$(7) \text{ נתון: } f(x) = a - \sin x, \quad g(x) = \cos x$$

(א) נסמן את נקודת ההשקה ב-A ואז:

$$\begin{cases} f(x_A) = g(x_A) \\ f'(x_A) = g'(x_A) \end{cases}$$

$$f'(x) = -\cos x$$

$$g'(x) = -\sin x$$

$$f'(x) = g'(x) \Rightarrow -\cos x = -\sin x \Rightarrow \tan x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

המשך בעמוד הבא <<<

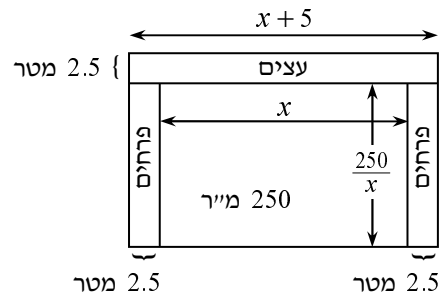
$$x_A = \frac{\pi}{4} \Rightarrow y_A = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{בתחום הנתון:}$$

$$f(x_A) = g(x_A) \Rightarrow a - \sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} \quad \text{ואז:}$$

$$a - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sqrt{2} - \sin x - \cos x) dx = \left(\sqrt{2}x + \cos x - \sin x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \quad (ב) \\ &= \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - (0 + 1 - 0) = \\ &= \left(\frac{\pi\sqrt{2}}{4} - 1 \right) \approx 0.111 \text{ יחידות שטח} \end{aligned}$$

(8) נסמן ב- x (מטרים) את אורך אחת הצלעות



של המבנה המלבני ששטחו 250 מ"ר.

ניעזר בסרטוט ובסימונים שעליו.

שטח המבנה המלבני הוא 250 מ"ר

ואורך אחת מצלעותיו x מטר,

לכן אורך הצלע השנייה $\frac{250}{x}$ מטר.

לפנינו שאלת מינימום שבה פונקציית המטרה היא עלות הגינן.

נסמן ב- a ש"ח את מחיר מ"ר גינן בפרחים, ואז מחיר מ"ר גינן בעצים

הוא $1.25a$ ש"ח.

$$f(x) = \underbrace{a \cdot 2.5 \cdot \frac{250}{x} \cdot 2}_{\text{עלות הגינן}} + \underbrace{1.25a \cdot 2.5(x + 5)}_{\text{עלות גינן 2 חלקות הפרחים}}$$

$$f(x) = \frac{1,250a}{x} + 3.125ax + 15.625a$$

$$f'(x) = -\frac{1,250a}{x^2} + 3.125a$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{1,250a}{x^2} + 3.125a = 0 \quad / \cdot \frac{x^2}{a}$$

המשך בעמוד הבא <<<

$$-1,250 + 3.125x^2 = 0 \Rightarrow x = 20$$

(הפתרון $x = -20$ נפסל).

$$f'''(x) = \frac{1,250a \cdot 2}{x^3} \quad \text{לקביעת סוג הקיצון:}$$

$$f'''(20) > 0 \Rightarrow \min$$

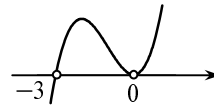
נשאלנו מה צריך להיות אורך חזית החלקה והוא מסומן על-ידי $x + 5$ מטרים.

תשובה: כדי שעלות הגינון תהיה מינימלית, אורך חזית החלקה

צריך להיות 25 מטר.

(9) (א) תחום ההגדרה של הנגזרת:

$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 \geq 0 \\ \sqrt{x^3 + 3x^2} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x^2(x+3) > 0$$



תחום ההגדרה: $-3 < x < 0$, $x > 0$.

(ב) משוואת אסימפטוטה אנכית:

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{9x^2 + 18x}{\sqrt{x^3 + 3x^2}} = \frac{81 - 54}{\sqrt{-27 + 27}} = \frac{27}{0^+} = \infty \Rightarrow x = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{9x^2 + 18x}{\sqrt{x^3 + 3x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{9x(x+2)}{|x|\sqrt{x+3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{9x(x+2)}{x\sqrt{x+3}} = \frac{9 \cdot 2}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{9x^2 + 18x}{\sqrt{x^3 + 3x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{9x(x+2)}{|x|\sqrt{x+3}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{9x(x+2)}{-x\sqrt{x+3}} = \frac{9 \cdot 2}{-\sqrt{3}} = -6\sqrt{3}$$

כלומר בנקודה שבה $x = 0$ לגרף פונקציית הנגזרת אין אסימפטוטה.

(ג) לפונקציה יש נקודות קיצון כאשר $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{9x^2 + 18x}{\sqrt{x^3 + 3x^2}} = 0 \Rightarrow 9x(x+2) = 0$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow \text{אינו שייך לתחום ההגדרה}$$

$$x_2 = -2$$

לפי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$: $f'(-3 < x < -2) > 0$

המשך בעמוד הבא <<<

$$f'(-2 < x < 0) < 0$$

לכן בנקודה $x = -2$ יש לפונקציה $f(x)$ נקודת מקסימום.

(ד) לפי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ולפי סעיף (ג) בו מצאנו $f'(-2) = 0$:

הפונקציה $f(x)$ עולה $\Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow x > 0$

הפונקציה $f(x)$ יורדת $\Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow -2 < x < 0$

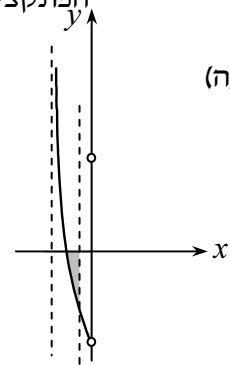
הפונקציה $f(x)$ עולה $\Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow -3 \leq x < -2$

$$S_{\text{מפואר}} = - \int_{-2}^a f'(x) dx \Rightarrow 12 - 6\sqrt{2} = -[f(x)]_{-2}^a \quad (\text{ה})$$

$$12 - 6\sqrt{2} = f(-2) - f(a)$$

$$12 - 6\sqrt{2} = f(-2) - 6\sqrt{2} + 6$$

$$f(-2) = 6$$



גבי יקואל

משוב צת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

♦ לכל הכיתות ♦ לכל השאלונים ♦ לכל הרמות