

## פתרון מבחן מס' 2 (ספר לימוד – שאלון 035806)

(1) נסמן: פועל מהיר יכול לסיים את כל העבודה ב-  $x$  שעות,

ופועל איטי יכול לסיים את כל העבודה ב-  $y$  שעות.

שני הפועלים יחד צריכים להכין  $N$  חלקים.

אז: בשעה אחת, הפועל המהיר עושה  $\frac{1}{x}$  של כל העבודה ( $\frac{N}{x}$  חלקים),

והפועל האיטי עושה  $\frac{1}{y}$  של כל העבודה ( $\frac{N}{y}$  חלקים).

כאשר שני הפועלים עובדים יחד, הם עושים בשעה אחת  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy}$

של כל העבודה, ויכולים לסיים את כולה ב-  $\frac{xy}{x+y}$  שעות.

הפועל המהיר עשה בסך הכול: חלקים  $\frac{N}{x} \cdot \frac{xy}{x+y} = \frac{Ny}{x+y}$

הפועל האיטי עשה בסך הכול: חלקים  $\frac{N}{y} \cdot \frac{xy}{x+y} = \frac{Nx}{x+y}$

מספר החלקים שהכין הפועל המהיר גדול ב- 40 ממספר החלקים שהכין

הפועל האיטי, לכן: הפועל האיטי, לכן:  $\frac{Nx}{x+y} = \frac{Ny}{x+y} + 40$  (\*)

אם הפועל המהיר היה מכין  $\frac{Nx}{x+y}$  חלקים, היה לוקח לו  $\frac{x^2}{x+y}$  שעות  $\frac{Nx}{x} = \frac{Nx}{x+y}$

אם הפועל האיטי היה מכין  $\frac{Ny}{x+y}$  חלקים, היה לוקח לו  $\frac{y^2}{x+y}$  שעות  $\frac{Ny}{y} = \frac{Ny}{x+y}$

לכן:  $\frac{\frac{x^2}{x+y}}{\frac{y^2}{x+y}} = \frac{9}{16} \Rightarrow \frac{x^2}{y^2} = \frac{9}{16} \Rightarrow \frac{x}{y} = \pm \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{3}{4}$

**תשובה לסעיף (ב):** הזמן שבו הפועל האיטי יסיים את כל העבודה גדול פי  $\frac{4}{3}$

מהזמן שבו הפועל המהיר יסיים את כל העבודה.

נציב  $x = \frac{3}{4}y$  במשוואה (\*) ונקבל:

$$\frac{N \cdot y}{y + \frac{3}{4}y} = \frac{N \cdot \frac{3}{4}y}{y + \frac{3}{4}y} + 40 \Rightarrow \frac{4}{7}N = \frac{3}{7}N + 40 \Rightarrow \frac{N}{7} = 40 \Rightarrow N = 280$$

**תשובה לסעיף (א):** שני הפועלים הכינו יחד 280 חלקים.

(2) (א) בקבוצה ה- $n$  ית יש  $(2n-1)$  איברים המהווים סדרה חשבונית שהפרשה 1 :

$$A_{2n-1} = A_1 + 1 \cdot (2n-1-1) \Rightarrow n^2 = A_1 + 2n - 2$$

$$A_1 = n^2 - 2n + 2$$

$$\begin{aligned} S = S_{2n-1}^{(n)} &= [2A_1 + 1 \cdot (2n-2)] \cdot \frac{2n-1}{2} = & (ב) \\ &= (2n^2 - 4n + 4 + 2n - 2) \cdot \frac{2n-1}{2} = \\ &= (n^2 - n + 1)(2n-1) \end{aligned}$$

(ג) נסמן את המספרים של הקבוצות הסמוכות ב- $N$  ו- $(N+1)$ , לכן :

$$S^{(N+1)} - S^N = 728$$

לפי הנוסחה שקיבלנו בסעיף (ב) :

$$[(N+1)^2 - (N+1) + 1] \cdot [2(N+1) - 1] - (N^2 - N + 1)(2N - 1) = 728$$

$$(N^2 + 2N + 1 - N - 1 + 1)(2N + 1) - (N^2 - N + 1)(2N - 1) = 728$$

$$(N^2 + N + 1)(2N + 1) - (N^2 - N + 1)(2N - 1) = 728$$

$$2N^3 + 3N^2 + 3N + 1 - (2N^3 - 3N^2 + 3N - 1) = 728$$

$$6N^2 = 726 \Rightarrow N^2 = 121 \Rightarrow N = \pm 11$$

$N$  הוא מספר טבעי, מכאן :  $N = 11$ .

**תשובה:** שתי הקבוצות הסמוכות הן קבוצות 11 ו-12.

$$P(\text{שחור}) = q = \frac{1}{2}, \quad P(\text{לבן}) = p = \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} P(\text{הסתיים בלבן}) &= p + qp + q^2p + q^3p + q^4p = & (א) \\ &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{31}{32} \end{aligned}$$

$$P(\text{המשחק הסתיים בלבן / שחור בזריקה הראשונה}) = & (ב)$$

$$= \frac{P(\text{הסתיים בלבן}) - p}{P(\text{הסתיים בלבן})} = \frac{\frac{31}{32} - \frac{1}{2}}{\frac{31}{32}} = \frac{15}{31}$$

המשך בעמוד הבא <<<

$$\begin{cases} 2p = q \\ p + q = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = \frac{1}{3} \\ q = \frac{2}{3} \end{cases} \quad (ג)$$

$$\begin{aligned} P(\text{הסתיים בלבן}) &= p + qp + q^2p + q^3p + q^4p = \\ &= p(1 + q + q^2 + q^3 + q^4) = \\ &= p \cdot 1 \cdot \frac{1 - q^5}{1 - q} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \frac{32}{243}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{211 \cdot 3}{243 \cdot 1} = \frac{211}{243} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{המשחק הסתיים בלבן / שחור בזריקה הראשונה}) &= \quad (ד) \\ &= \frac{P(\text{הסתיים בלבן}) - p}{P(\text{הסתיים בלבן})} = \frac{\frac{211}{243} - \frac{1}{3}}{\frac{211}{243}} = \frac{211 - 81}{211} = \frac{130}{211} \end{aligned}$$

(4) נסמן:  $GC = b$ ,  $DG = a$ ,  $BE = x$ , מכאן:  $AB = a + b$ .

לפי משפט דמיון ז.ז.  $\Delta DGF \sim \Delta ABF$   $DG \parallel AB \Rightarrow$

$$\frac{FG}{FB} = \frac{DG}{AB} \Rightarrow \frac{24}{32+x} = \frac{a}{a+b}$$

לפי משפט דמיון ז.ז.  $\Delta GCE \sim \Delta BAE$   $GC \parallel AB \Rightarrow$

$$\frac{GE}{EB} = \frac{GC}{AB} \Rightarrow \frac{8}{x} = \frac{b}{a+b}$$

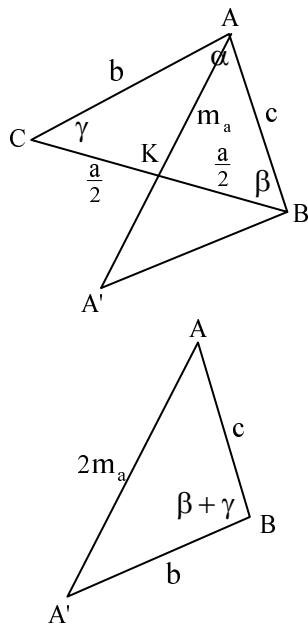
נחבר אגפים מתאימים בשני הביטויים האחרונים ונקבל:

$$\frac{24}{32+x} + \frac{8}{x} = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} \Rightarrow \frac{24}{32+x} + \frac{8}{x} = 1 \quad / \cdot x(32+x)$$

$$24x + 256 + 8x = x^2 + 32x \Rightarrow x^2 = 256 \Rightarrow x = \pm 16$$

$x > 0$  כי אורך צלע הוא גודל חיובי, לכן:  $x = BE = 16$  ס"מ

(5) שאלות המשלבות גיאומטריה + טריגונומטריה הורדו מתוכנית הלימודים.



$$CK = KB = \frac{a}{2} \quad (\text{א}) \quad (6)$$

נאריך את קטע AK כאורכו:

$$A'K = KA$$

$$\sphericalangle CKA = \sphericalangle BKA'$$

$$CK = KB = \frac{a}{2}$$

לפי משפט חפיפה צ.ז.צ.  $\triangle BKA' \cong \triangle CKA$

↓

$$\sphericalangle KBA' = \sphericalangle ACK = \gamma$$

$$A'B = AC = b$$

לפי משפט הקוסינוסים ב-  $\triangle BAA'$ :

$$(2m_a)^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\beta + \gamma)$$

$$4m_a^2 = b^2 + c^2 - 2bc(180^\circ - \alpha)$$

$$m_a = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(180^\circ - \alpha)}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha}$$

(ב) לפי סעיף (א) נקבל:

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + b^2 + 2b \cdot b \cdot \cos 60^\circ} = \frac{1}{2} \sqrt{3b^2} = \frac{b\sqrt{3}}{2}$$

במשולש שווה-צלעות התיכון הוא גם גובה.

לכן, לפי משפט פיתגורס:

$$b^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + m_a^2$$

$$m_a^2 = b^2 - \frac{b^2}{4} \Rightarrow m_a = \frac{b\sqrt{3}}{2}$$

(7) (א) נסמן ב- C את הנקודה שבה קושרים את כבל לקרקע,

ב- D את קצה העמוד השמאלי וב- E את קצה העמוד הימני.

נסמן:  $x$  מ' AC, מכאן:  $(20 - x)$  מ' BC.

פונקציית המטרה (אורך הכבל):

$$F = DC + EC = \sqrt{9^2 + x^2} + \sqrt{15^2 + (20 - x)^2}$$

(לפי משפט פיתגורס במשולשים ADC ו- BCE בהתאמה).

$$F(x) = \sqrt{x^2 + 81} + \sqrt{x^2 - 40x + 625}$$

$$F'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 81}} + \frac{2x - 40}{2\sqrt{x^2 - 40x + 625}} = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 81}} = \frac{20 - x}{\sqrt{x^2 - 40x + 625}}$$

$$x\sqrt{x^2 - 40x + 625} = (20 - x)\sqrt{x^2 + 81}$$

תחום ההגדרה הוא:  $0 \leq x \leq 20$ , לכן:

$$x^2(x^2 - 40x + 625) = (400 - 40x + x^2)(x^2 + 81)$$

$$\cancel{x^4} - 40x^3 + 625x^2 = \cancel{x^4} - 40x^3 + 481x^2 - 3,240x + 32,400$$

$$144x^2 + 3,240x - 32,400 = 0 \quad / : 72$$

$$2x^2 + 45x - 450 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-45 \pm 75}{4}$$

$$x_1 = -30, x_2 = 7.5$$

הפתרון  $x_1 = -30$  נפסל כי:  $0 \leq x \leq 20$ .

עבור:  $x = 7.5$  מ'  $x$ :

$$\tan \alpha = \frac{7.5}{9} = \frac{5}{6} \quad \text{ב- } \Delta ADC$$

$$\tan \beta = \frac{12.5}{15} = \frac{5}{6} \quad \text{ב- } \Delta BCE$$

$$\tan \alpha = \tan \beta \Rightarrow \alpha = \beta$$

נשאר לבדוק שעבור  $x = 7.5$  מ'  $x$  F(x) מקבלת ערך מינימלי:

המשך בעמוד הבא <<<

x	$0 < x < 7.5$	$x = 7.5$	$7.5 < x < 20$
$F'(x)$	-	0	+
$F(x)$	↘	min	↗

$$F'(1) = \frac{1}{\sqrt{82}} + \frac{-19}{\sqrt{586}} < 0 \quad , \quad F'(10) = \frac{10}{\sqrt{181}} + \frac{-10}{\sqrt{325}} > 0$$

(ב) נבדוק את ערך הפונקציה בקצוות:

$$F(0) = \sqrt{81} + \sqrt{625} = 34$$

$$F(20) = \sqrt{481} + \sqrt{225} = 36.93$$

לכן כאשר  $x = 20$  מטר, כלומר כאשר קושרים את הכבל

בנקודה B, אז אורכו מקסימלי.

$$\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{(א) תחום הגדרה: (8)}$$

$$\sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

בתחום הנתון:  $x \neq \frac{\pi}{2}, x \neq 0, x \neq \pi$ .

מכאן: משוואות האסימפטוטות הן:  $x = \frac{\pi}{2}, x = 0, x = \pi$ .

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 x} \cdot \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} \cdot (-\sin x) = -\left(\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x}\right) \quad \text{(ב)}$$

$$y' = 0 \Rightarrow -\frac{\cos^3 x + \sin^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = 0$$

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 0 \Rightarrow \sin^3 x = -\cos^3 x$$

$\cos x = 0$  אינו פתרון של המשוואה, לכן אפשר לקבוע  $\cos x \neq 0$

בלי לאבד שורש של המשוואה.

נחלק כל אגף במשוואה ב- $\cos^3 x$  ונקבל:

$$\tan^3 x = -1 \Rightarrow \tan x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

המשך בעמוד הבא <<<

$$x = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \quad \text{בתחום הנתון:}$$

נקודה חשודה לקיצון:  $(\frac{3\pi}{4}, 2\sqrt{2})$ .

x	x = 0	$0 < x < \frac{\pi}{2}$	$x = \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}$	$x = \frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4} < x < \pi$	x = π
f'(x)	נקודת-אי	-	נקודת-אי	-	0	+	נקודת-אי
f(x)	הגדרה	↘	הגדרה	↘	min	↗	הגדרה

$$y'(\frac{\pi}{4}) < 0, \quad y'(\frac{2.5\pi}{4}) < 0, \quad y'(\frac{3.5\pi}{4}) > 0$$

כלומר:  $\min(\frac{3\pi}{4}, 2\sqrt{2})$ .

$$y = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x} = 0 \Rightarrow \sin x = \cos x \quad (ג)$$

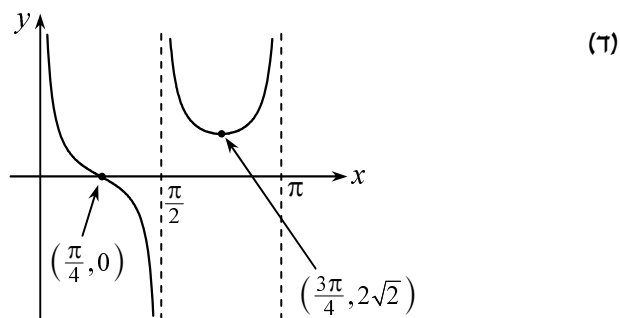
$$\cos x \neq 0 \quad \text{לכן אפשר לקבוע} \quad \cos x = 0$$

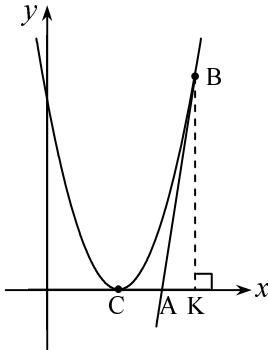
בלי לאבד שורש של המשוואה.

נחלק כל אגף במשוואה ב-  $\cos x$  ונקבל:

$$\tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

בתחום הנתון:  $(\frac{\pi}{4}, 0)$ .





$$y = x^2 - 10x + 25 \Rightarrow y = (x - 5)^2 \quad (9)$$

$$y_{\text{השקה}} = (t - 5)^2 : \text{מכאן, } x_{\text{השקה}} = t : \text{נסמן (א)}$$

$$y' = 2x - 10$$

$$m_{\text{משיק}} = y'(t) = 2t - 10$$

$$m_{\text{משיק}} = \frac{y_{\text{השקה}} - 0}{x_{\text{השקה}} - 8} = \frac{(t - 5)^2}{t - 8}$$

נשווה את שני הביטויים שמצאנו עבור  $m_{\text{משיק}}$  :

$$(2t - 10) = \frac{(t - 5)^2}{t - 8} \Rightarrow (2t - 10)(t - 8) = (t - 5)^2$$

$$2t^2 - 26t + 80 = t^2 - 10t + 25$$

$$t^2 - 16t + 55 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{16 \pm 6}{2}$$

$$t_1 = 5, t_2 = 11 \Rightarrow x_C = 5, x_B = 11$$

$$x_C = 5 \Rightarrow m_1 = 2 \cdot 5 - 10 = 0$$

$$x_B = 11 \Rightarrow m_2 = 2 \cdot 11 - 10 = 12$$

שיעורי נקודות ההשקה:  $C(5, 0)$ ,  $B(11, 36)$ .

$$y - 0 = 0(x - 5) \Rightarrow y = 0 \quad \text{משוואות המשיקים:}$$

$$y - 36 = 12(x - 11) \Rightarrow y = 12x - 96$$

$$y_A = 0 \Rightarrow 0 = 12x - 96 \Rightarrow x_A = 8 \quad (ב)$$

$$S = \int_5^{11} (x - 5)^2 - S_{\Delta ABK} = \frac{(x - 5)^3}{3} \Big|_5^{11} - \frac{AK \cdot BK}{2} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot [(11 - 5)^3 - (5 - 5)^3] - \frac{(11 - 8)(36 - 0)}{2} =$$

$$= 72 - 54 = 18 \text{ יחידות שטח}$$

**גבי יקואל**

**מ ש ב צ ת**

**[www.mishbetzet.co.il](http://www.mishbetzet.co.il)**

**טלפון: 04-8200929**

**ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה**

**לכל הכיתות ✦ לכל השאלונים ✦ לכל הרמות**