פתרון מבחן מס' 1 (ספר לימוד – שאלון 035806)

(1) נסמן ב- x קמ"ש את מהירות הטנדר.

ב- 20 דקות הטנדר עובר מרחק של $\frac{x}{3}$ ק"מ.

המהירות היחסית של המכונית ביחס לטנדר היא $45 - x$ קמ"ש,

לכן המכונית תעקוף את הטנדר אחרי $t = \frac{\frac{x}{3}}{45 - x}$ שעות.

בזמן זה, שני הרכבים יעברו מרחק של: $\ell = 45 \cdot \frac{\frac{x}{3}}{45 - x} = \frac{15x}{45 - x}$ ק"מ

לפי הנתון, הזמן שלקח למכונית לעבור חצי המרחק עד הקיבוץ בדרך חזרה,

שווה לזמן שבו הטנדר הגיע לחיפה. מכאן:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{15x}{45 - x} : 45 = \left(40 - \frac{15x}{45 - x}\right) : x$$

$$\frac{x}{6\,(45 - x)} = \frac{1{,}800 - 55x}{x\,(45 - x)} \quad \Rightarrow \quad x^2 = 10{,}800 - 330x$$

$$x^2 + 330x - 10{,}800 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-330 \pm 390}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 30 \;,\; x_2 = -360$$

הפתרון $x_2 = -360$ נפסל, כי מהירות היא גודל חיובי.

תשובה: מהירות הטנדר היא 30 קמ"ש.

(2) נסמן את הסכומים:

(נניח $m > n$)

$$\underbrace{\underbrace{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}_{S_n} + \underbrace{a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_m}_{S_m - S_n}}_{S_m}$$

ואז:

$$S_m - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_m =$$

$$= [2a_{n+1} + d(m - n - 1)] \cdot \frac{m - n}{2} =$$

$$= [2(a_1 + nd) + d(m - n - 1)] \cdot \frac{m - n}{2} =$$

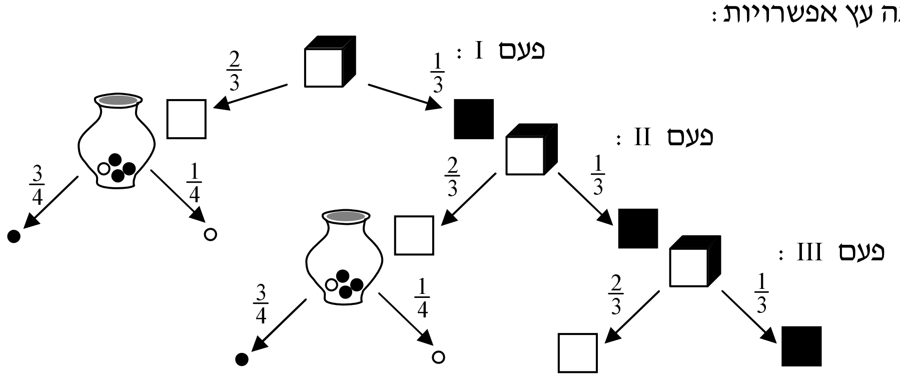
$$= [2a_1 + d(m + n - 1)] \cdot \frac{m - n}{2}$$

$$\frac{S_{m+n}}{S_m - S_n} = \frac{[2a_1 + d(m + n - 1)] \cdot \frac{m+n}{2}}{[2a_1 + d(m + n - 1)] \cdot \frac{m-n}{2}} = \frac{m + n}{m - n}$$

(3) $P(\text{פאה לבנה}) = \frac{2}{3}$, $P(\text{פאה שחורה}) = \frac{1}{3}$

$P(\text{כדור לבן}) = \frac{1}{4}$, $P(\text{כדור שחור}) = \frac{3}{4}$

נבנה עץ אפשרויות :



(א) $P(\text{מסתיים בהוצאת כדור שחור}) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

(ב) $P(\text{כל הזמן אותו צבע}) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{11}{54}$

(ג) $P(\text{זריקה אחת או שתיים / מסתיים בהוצאת בכדור שחור}) =$

$$= \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}} = \frac{\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)}{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$$

(4) (א) **טענה** | **נימוק**

(1) $\measuredangle CDB = \measuredangle AED = 18°$ — מהנתונים $\measuredangle AED = 18°$, $BD = BE$ במשולש BDE מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות.

(2) $\measuredangle CFB = \measuredangle CDB = 18°$ — נובע מ- (1) , זוויות היקפיות הנשענות על אותה הקשת שוות זו לזו.

(ב) **טענה** | **נימוק**

(3) $\measuredangle ACB = 90°$ — מהנתון ש- AB קוטר במעגל. זווית היקפית הנשענת על קוטר שווה ל- $90°$.

(4) $\measuredangle CAB = \measuredangle CFB = 18°$ — נובע מ- (2) , על קשתות שוות במעגל נשענות זוויות היקפיות שוות.

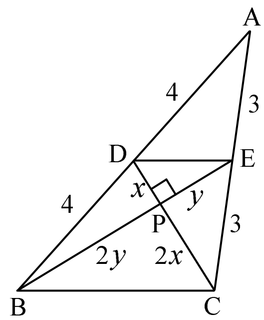
המשך בעמוד הבא ◄◄◄

		טענה	נימוק
	(5)	$\measuredangle ABC = 72°$	נובע מ- (3) ו- (4) סכום זוויות במשולש ABC הוא $180°$.
(ג)		**טענה**	**נימוק**
	(6)	$\measuredangle AED = \frac{\overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{BC}}{2}$	$\measuredangle AED$ היא זווית חיצונית למעגל הכולאת את הקשתות $\overset{\frown}{AD}$ (הקשת הגדולה) ו- $\overset{\frown}{BC}$ (הקשת הקטנה).
	(7)	$\overset{\frown}{BC} = 36°$	נובע מ- (1) הקשת (הנמדדת במעלות) שווה לזווית המרכזית הנשענת על קשת זו, וזווית מרכזית שווה פעמיים הזווית ההיקפית הנשענת על אותה הקשת.
	(8)	$18° = \frac{\overset{\frown}{AD} - 36°}{2}$	נובע מ- (6) , (7) , ומהנתון $\measuredangle AED = 18°$.
	(9)	$\overset{\frown}{AD} = 72°$	נובע מ- (8) .
	(10)	$\measuredangle DBA = 36°$	נובע מ- (9) , זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית (חצי הקשת) הנשענת על אותה הקשת.
	(11)	$\measuredangle CBD = 36°$	נובע מ- (5) , (10) חיסור זוויות.
	(12)	BD חוצה $\measuredangle ABC$	נובע מ- (11) .
		מ.ש.ל סעיף (ג).	
(ד)		**טענה**	**נימוק**
	(13)	$\measuredangle BCF = 54°$	מהנתון $\measuredangle BDF = 54°$, זוויות היקפיות הנשענות על אותה הקשת שוות.
	(14)	$\measuredangle CBF = 108°$	נובע מ- (2) , (13) , סכום הזוויות במשולש CBF הוא $180°$.
	(15)	$\measuredangle CBE = 108°$	נובע מ- (5) , סכום זוויות צמודות הוא $180°$.
	(16)	$\measuredangle DFC = 36°$	נובע מ- (11) על אותה קשת נשענות זוויות היקפיות שוות.
	(17)	$\measuredangle DFB = 54°$	נובע מ- (2) , (16) , וחיבור זוויות.

המשך בעמוד הבא ➤➤➤

(18)	$BF = BD$	נובע מ- (17) ומהנתון $\measuredangle BDF = 54°$, במשולש מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות.
(19)	$BF = BE$	נובע מ- (18) ומהנתון $BF = BD$ כלל המעבר.
(20)	$BC = BC$	גודל השווה לעצמו.
(21)	$\Delta FCB \cong \Delta ECB$	נובע מ- (14) , (15) , (19) , (20) , משפט חפיפה צ.ז.צ.

(5) (א) ניעזר בסימונים x ו- y בסרטוט שבו:



נקודת מפגש התיכונים P מחלקת כל תיכון ביחס $2:1$ (הקטע הארוך קרוב לקדקוד).

לכן נוכל לסמן: $DP = x$, $PC = 2x$

וכן: $PE = y$, $BP = 2y$

בעזרת שימוש במשפט פיתגורס במשולשים PCE ו- BDP נקבל את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 + 4y^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \quad x^2 = \tfrac{4}{3} \ , \ y^2 = \tfrac{11}{3}$$

כלומר $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $y = \sqrt{\frac{11}{3}}$

כעת נוכל לחשב את שטח המרובע BDEC כסכום שטחי המשולשים: BPC , BPD , CEP ו- DPE:

$$S_{BCED} = S_{\Delta BPC} + S_{\Delta BPD} + S_{\Delta CEP} + S_{\Delta DPE} =$$

$$= \frac{2x \cdot 2y}{2} + \frac{2y \cdot x}{2} + \frac{2x \cdot y}{2} + \frac{x \cdot y}{2} = \frac{9xy}{2} =$$

$$= \frac{9 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{11}{3}}}{2} = 3\sqrt{11}$$ סמ"ר

DE קטע אמצעים במשולש ABC לכן $DE \parallel BC$.

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

$\measuredangle ADE = \measuredangle ACB$ ו- $\measuredangle ADE = \measuredangle ABC$ כזוג זוויות מתאימות בין ישרים מקבילים. לכן $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ לפי משפט דמיון ז.ז.

יחס הדמיון הוא 2 , לכן $S_{\Delta ABC} = 4 \cdot S_{\Delta ADE}$.

כלומר: $S_{\Delta ADE} = \frac{1}{3} \cdot S_{BCED} = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{11} =$ $\sqrt{11}$ סמ"ר

ומכאן נקבל: $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ADE} + S_{BCED} =$ $4\sqrt{11}$ סמ"ר

(ב) לפי משפט פיתגורס ב- ΔBPC : $BC = \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2}$

כלומר: $BC = \sqrt{4 \cdot \frac{4}{3} + 4 \cdot \frac{11}{3}} =$ $\sqrt{20}$ ס"מ

במשולש ABC : $AB =$ 8 ס"מ , $AC =$ 6 ס"מ , $BC =$ $\sqrt{20}$ ס"מ

ומכאן, בעזרת משפט הקוסינוסים ניתן למצוא את כל אחת מזוויות המשולש.

נמצא למשל את $\measuredangle A$: $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos\measuredangle A$

$$20 = 36 + 64 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos\measuredangle A$$

$$\cos\measuredangle A = \frac{5}{6} \quad \Rightarrow \quad \measuredangle A = 33.56°$$

כעת בעזרת משפט הסינוסים במשולש ABC :

$$\frac{6}{\sin\measuredangle B} = \frac{\sqrt{20}}{\sin 33.56} \quad \Rightarrow \quad \measuredangle B = 47.87°$$

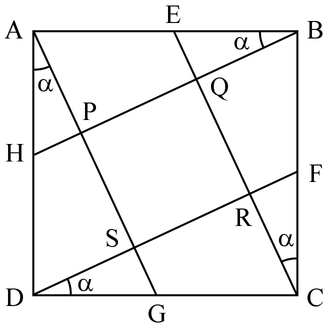
הפתרון $\measuredangle B = 132.13°$ מתבטל מכיוון שבמשולש מול צלע גדולה מונחת זווית גדולה. ואז:

$$\measuredangle C = 180° - 33.56° - 47.87° = 98.57°$$

הערה: אם לאחר מציאת $\measuredangle A$ היינו רוצים למצוא את $\measuredangle C$ בעזרת משפט הסינוסים היינו מקבלים:

$\measuredangle C = 98.57°$ או $\measuredangle C = 81.43°$.

כדי לקבל את התשובה הנכונה יש לשים לב ש- $\measuredangle C$ היא זווית קהה מכיוון ש: $AB^2 > AC^2 + BC^2$ ($8^2 > 6^2 + (\sqrt{20})^2$).



(6) נסמן: $AB = BC = CD = DA = a$

$PQ = QR = RS = SP = b$

(א) צ"ל: $\frac{b}{a} = ?$

במשולש ישר-זווית BCQ $(\measuredangle Q = 90°)$:

$CQ = BC \cdot \cos\measuredangle C = a \cdot \cos\alpha$

במשולש ישר-זווית DRC $(\measuredangle R = 90°)$:

$RC = DC \sin\measuredangle D = a \cdot \sin\alpha$

חיסור זוויות. $b = QR = QC - RC$

$$b = a\cos\alpha - a\sin\alpha \;\Rightarrow\; b = a(\cos\alpha - \sin\alpha)$$

$$\Rightarrow\; \frac{b}{a} = \cos\alpha - \sin\alpha$$

מ.ש.ל. (א).

(ב) נתון: $RP = AB$

לפי משפט פיתגורס ב- ΔPQR :

$$PQ^2 + QR^2 = PR^2 \;\Rightarrow\; PR^2 = b^2 + b^2$$

$$PR = b\sqrt{2} \;\Rightarrow\; b\sqrt{2} = a \;\Rightarrow\; \frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

לפי סעיף (א):

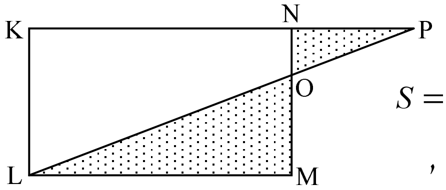
$$\cos\alpha - \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad / : \sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \sin 45°\cos\alpha - \cos 45°\sin\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\sin(45° - \alpha) = \frac{1}{2}$$

$$45° - \alpha = 30° + 360°n \;\cup\; 45° - \alpha = 150° + 360°k$$

$$\begin{cases} \alpha = 15° + 360°n \;\cup\; \alpha = 255° + 360°k \\ \alpha < 90° \end{cases} \;\Rightarrow\; \alpha = 15°$$



(7) פונקציית המטרה:

$$S = S_{\Delta PON} + S_{\Delta MOL} = \frac{ON \cdot NP}{2} + \frac{OM \cdot ML}{2}$$

נסמן: $NM = a$, $LM = b$, $NO = x$,

ואז: $OM = a - x$.

נבטא את NP בעזרת a , b ו- x :

$\Delta PNO \sim \Delta LMO$ (הרכבה של משפט תאלס)

לכן: $\frac{PN}{LM} = \frac{NO}{MO} \Rightarrow \frac{PN}{b} = \frac{x}{a-x} \Rightarrow PN = \frac{bx}{a-x}$

מכאן, פונקציית המטרה: $S(x) = \frac{x \cdot \frac{bx}{a-x}}{2} + \frac{b \cdot (a-x)}{2} =$

$$= \frac{bx^2}{2 \cdot (a-x)} + \frac{b \cdot (a-x)}{2} = \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{x^2}{a-x} + a - x \right)$$

$$S'(x) = \frac{b}{2} \cdot \left[\frac{2x \cdot (a-x) + x^2}{(a-x)^2} - 1 \right]$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow \frac{b}{2} \cdot \left[\frac{2x \cdot (a-x) + x^2}{(a-x)^2} - 1 \right] = 0$$

$$2ax - x^2 = (a-x)^2 \Rightarrow 2ax - x^2 = a^2 + x^2 - 2ax$$

$$2x^2 - 4ax + a^2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{4a \pm \sqrt{16a^2 - 8a^2}}{4} = \frac{2a \pm a\sqrt{2}}{2}$$

$$x_1 = \frac{a}{2} \cdot (2 + \sqrt{2}) \ , \ x_2 = \frac{a}{2} \cdot (2 - \sqrt{2})$$

$0 \le x \le a$, $x_1 > a$, לכן הפתרון נפסל, לפי המשמעות של השאלה.

x	$0 \le x < \frac{a}{2} \cdot (2 - \sqrt{2})$	$x = \frac{a}{2} \cdot (2 - \sqrt{2})$	$\frac{a}{2} \cdot (2 - \sqrt{2}) < x < a$
S′	−	0	+
S	↘	min	↗

$$S'(0) = \frac{b}{2} \cdot (0 - 1) < 0$$

$$S'(0.9a) = \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{1.8a \cdot 0.1a + 0.81a^2}{0.01a^2} - 1 \right) = \frac{b}{2} \cdot (99 - 1) > 0$$

עבור $x = \frac{a}{2} \cdot (2 - \sqrt{2})$ סכום השטחים הוא מינימלי. במקרה זה:

$$\frac{ON}{OM} = \frac{x}{a-x} = \frac{\frac{a}{2} \cdot (2 - \sqrt{2})}{a - \frac{a}{2} \cdot (2 - \sqrt{2})} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2 - 2 + \sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$$ מ.ש.ל.

(8) (א) $f'(x)=\frac{1}{2}\cdot 2\cos 2x-1=\cos 2x-1=1-2\sin^2 x-1=-2\sin^2 x$

(ב) (i) לכל x $\sin^2 x\ge 0 \;\Rightarrow\; -2\sin^2 x\le 0 \;\Rightarrow\; f'(x)\le 0$

לכן, הפונקציה יורדת בכל תחום, לכן אין לה נקודות קיצון.

(ii) $f'(x)=0 \;\Rightarrow\; -2\sin^2 x=0 \;\Rightarrow\; \sin x=0$

$x=\pi \mathrm{n}\ ,\ \mathrm{n}\in\mathbb{Z}$

בנקודות אלו הנגזרת שווה ל- 0 והנגזרת לא מחליפה את סימנה,

לכן בנקודות אלה לפונקציה יש נקודות פיתול.

$y=\frac{1}{2}\sin 2\pi\mathrm{n}-\pi\mathrm{n}=-\pi\mathrm{n} \;\Rightarrow\; (\pi\mathrm{n},-\pi\mathrm{n})\ ,\ \mathrm{n}\in\mathbb{Z}$

(**הערה:** יש נקודות פיתול נוספות, כאשר $y''(x)=0$,

אך לא מבקשים למצוא אותן).

(ג) $x+\sin^2 x\ge x \quad (\sin^2 x\ge 0)$

לכן: $g(x)\ge y$ בכל תחום, כלומר גרף הפונקציה $g(x)$ נמצא

מעל גרף הפונקציה y לכל ערך של x (חוץ ממספר סופי של נקודות,

שהן נקודות ההשקה).

$$S=\int_0^{2\pi}[g(x)-y]dx=\int_0^{2\pi}(x+\sin^2 x-x)dx=$$

$$=\int_0^{2\pi}\sin^2 x\,dx=\left[-\tfrac{1}{2}f(x)\right]\Big|_0^{2\pi}=\left[-\tfrac{1}{2}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\sin 2x-x\right)\right]\Big|_0^{2\pi}=$$

$$=-\tfrac{1}{2}\cdot\left[\tfrac{1}{2}\sin 4\pi-2\pi-\left(\tfrac{1}{2}\sin 0-0\right)\right]=$$

$$=-\tfrac{1}{2}\cdot(0-2\pi-0)=\pi \text{ יחידות שטח}$$

(9) (א) תחום הגדרה: $(x+a)^4 \neq 0 \;\Rightarrow\; x+a \neq 0 \;\Rightarrow\; x \neq -a$

(ב) $\lim\limits_{x\to -a} \frac{(x+2a)^2}{(x+a)^4} = \frac{a^2}{0^+} = +\infty \;\Rightarrow\; x=-a$

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{(x+2a)^2}{(x+a)^4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}+\frac{2a}{x^2}\right)}{\left(1+\frac{a}{x}\right)^4} = \frac{0}{1} = 0 \;\Rightarrow\; y=0$$

משוואות האסימפטוטות: $x=-a$, $y=0$.

(ג) שיעורי נקודת חיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y :

$$x=0 \;\Rightarrow\; f(0) = \frac{(2a)^2}{a^4} = \frac{4a^2}{a^4} = \frac{4}{a^2} \;\Rightarrow\; \left(0,\frac{4}{a^2}\right)$$

שיעורי נקודת חיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x :

$$f(x)=0 \;\Rightarrow\; \frac{(x+2a)^2}{(x+a)^4}=0 \;\Rightarrow\; (x+2a)^2=0$$

$$x=-2a \;\Rightarrow\; (-2a,0)$$

(ד) $f'(x)=0 \;\Rightarrow\; \frac{2(x+2a)(x+a)^4 - 4(x+a)^3(x+2a)^2}{(x+a)^8} = 0$

$$2(x+2a)[x+a-2(x+2a)]=0 \;\Rightarrow\; 2(x+2a)(-x-3a)=0$$

$$x+2a=0 \;\Rightarrow\; x=-2a$$

$$-x-3a=0 \;\Rightarrow\; x=-3a$$

(ה)

x	x < −3a	x = −3a	−3a < x < −2a	x = −2a
$f'(x)$	+	0	−	0
$f(x)$	↗	max	↘	min

x	−2a < x < −a	x = −a	x > −a
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	max	↘

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

$$f'(-4a)=\frac{2\,(-)\,(+)}{(-)}>0 \;\;,\;\; f'(-2.5a)=\frac{2\,(-)\,(-)}{(-)}<0$$

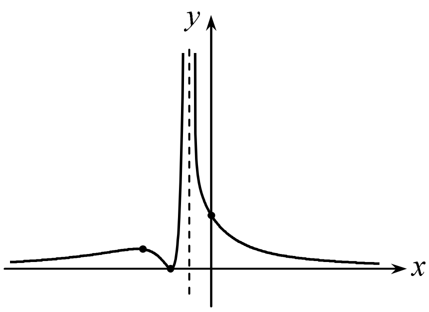
$$f'(-1.5a)=\frac{2\,(+)\,(-)}{(-)}>0 \;\;,\;\; f'(0)=\frac{2\,(+)\,(-)}{(+)}<0$$

תשובה: הפונקציה עולה עבור: $x<-3a \;\;,\;\; -2a<x<-a$

הפונקציה יורדת עבור: $x>-a \;\;,\;\; -3a<x<-2a$.

ו) $f(-2a)=0$

$$f(-3a)=\frac{a^2}{16a^4}=\frac{1}{16a^2}$$



גבי יקואל

משבצת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

◈ לכל הכיתות ◈ לכל השאלונים ◈ לכל הרמות