פתרון מבחן מס' 29 (ספר לימוד – שאלון 035805)

20-05-2017

(1) נוכיח כי סדרת האיברים $a_1\ ,\ -a_3\ ,\ a_5\ ,\ -a_7\ ,\ ...$ היא סדרה הנדסית.

הנוסחה של מקום כללי $(1\ ,\ 3\ ,\ 5\ ,\ ...)$ היא: $N=1+2(n-1)=2n-1$

$$\frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}}=-\frac{a_1q^{2n}}{a_1q^{2n-2}}=-q^2 \quad\Rightarrow\quad Q_1=-q^2\ ,\ |Q_1|<1$$

נוכיח כי סדרת האיברים $a_3\ ,\ a_7\ ,\ a_{11}\ ,\ a_{15}\ ,\ ...$ היא סדרה הנדסית.

הנוסחה של מקום כללי $(3\ ,\ 7\ ,\ 11\ ,\ 15\ ,\ ...)$ היא:

$$N=3+4(n-1)=4n-1$$

$$\frac{a_{4n+3}}{a_{4n-1}}=\frac{a_1q^{4n+2}}{a_1q^{4n-2}}=q^4 \quad\Rightarrow\quad Q_2=q^4\ ,\ |Q_2|<1$$

(א)

$$S_1=\frac{a_1}{1-Q_1}=\frac{a_1}{1+q^2}\quad ,\quad S_2=\frac{a_3}{1-Q_2}=\frac{a_1q^2}{1-q^4}$$

$$S_1=3\cdot S_2 \quad\Rightarrow\quad \frac{a_1}{1+q^2}=\frac{3a_1q^2}{1-q^4} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{1+q^2}=\frac{3q^2}{(1+q^2)(1-q^2)}$$

$$1+q^2\neq 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{3q^2}{1-q^2}=1 \quad\Rightarrow\quad 3q^2=1-q^2 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad q^2=\tfrac{1}{4} \quad\Rightarrow\quad q=\pm\tfrac{1}{2}$$

(ב) (*i*)

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-n-1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-n}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2=\text{const}$$

הסדרה b_n היא סדרה הנדסית עולה $(2>1)$ ומנתה $q=2$.

(*ii*)

$$S_n=\frac{127}{2^{k-1}} \quad\Rightarrow\quad b_1\cdot\frac{2^n-1}{2-1}=\frac{127}{2^{k-1}}$$

$$b_1=\left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-1}=2^{1-k} \quad\Rightarrow\quad 2^{1-k}\cdot(2^n-1)=\frac{127}{2^{k-1}}$$

$$2^n-1=127 \quad\Rightarrow\quad 2^n=128=2^7 \quad\Rightarrow\quad n=7$$

כלומר בסדרה b_n יש 7 איברים.

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(iii)

$$b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_n = 2^{42}$$

$$b_1 \cdot b_1 q \cdot b_1 q^2 \cdot \dots \cdot b_1 q^{n-1} = 2^{42}$$

$$b_1^n \cdot q^{1+2+\dots+(n-1)} = 2^{42} \quad \Rightarrow \quad \left(2^{1-k}\right)^n \cdot 2^{\frac{n(n-1)}{2}} = 2^{42}$$

$$2^{n-nk+\frac{n(n-1)}{2}} = 2^{42} \quad \Rightarrow \quad 7-7k+\frac{7\cdot 6}{2} = 42 \quad \Rightarrow \quad k=-2$$

הערה: $1+2+\dots+(n-1) =$

= סכום $(n-1)$ איברים בסדרה חשבונית =

$$= \frac{(a_1+a_N)\cdot N}{2} = \frac{1+(n-1)}{2}\cdot(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

(2) (א) נתבונן בריבוע $A'B'C'D'$.

$C'F = FB'$, $\measuredangle C' = \measuredangle B' = 90^\circ$, $C'D' = B'A'$

מכאן ש- $\Delta D'C'F \cong \Delta A'B'F$ לפי משפט חפיפה צ.ז.צ. ,

ולכן $D'F = A'F$ (צלעות מתאימות שוות במשולשים חופפים)

בדרך דומה, אפשר להוכיח כי $BF = CF$.

$B'F = B'F$ (כל גודל שווה לעצמו)

$\measuredangle FB'A' = \measuredangle FB'B = 90^\circ$

$B'A' = B'B$ (בקובייה כל המקצועות שווים)

$\Downarrow$

$\Delta A'FB' \cong \Delta BFB'$ (לפי משפט חפיפה צ.ז.צ.)

$\Downarrow$

$A'F = BF$ (צלעות מתאימות שוות במשולשים חופפים)

$\Downarrow$

המשך בעמוד הבא ⮜⮜⮜

(הצבה) $FD' = FA' = FC = FB$

$$\Downarrow$$

הפירמידה $FA'D'CB$ היא פירמידה ישרה

(ב) נתון כי אורך צלע הריבוע $A'D'BC$ הוא a .

(i) לפי משפט פיתגורס ב- $\Delta A'AB$:

$$A'B^2 = A'A^2 + AB^2 = a^2 + a^2 \quad \Rightarrow \quad A'B = a\sqrt{2}$$

לפי משפט פיתגורס ב- $\Delta A'D'B$:

$$D'B^2 = D'A'^2 + A'B^2 \quad \Rightarrow \quad D'B^2 = a^2 + (a\sqrt{2})^2 = 3a^2$$

$$D'B = a\sqrt{3}$$

$$D'O = OB = \tfrac{1}{2}D'B = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

לפי משפט פיתגורס ב- $\Delta FBB'$:

$$BF^2 = B'F^2 + BB'^2$$

$$BF^2 = \left(\tfrac{1}{2}a\right)^2 + a^2 = \frac{5a^2}{4} \quad \Rightarrow \quad BF = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

ב- ΔFOB :

$$\cos \measuredangle B = \frac{OB}{BF} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{a\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$\measuredangle B = \measuredangle FBO = \measuredangle FBD' \approx 39.23°$$

(ii) ב- ΔFOB :

$$FO = OB \cdot \tan \measuredangle B = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \tan 39.23° \approx 0.707a$$

$$V = \tfrac{1}{3} \cdot A'B \cdot BC \cdot FO = \tfrac{1}{3} \cdot a\sqrt{2} \cdot a \cdot 0.707a = \frac{a^3}{3}$$

(3) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x}{\ln a}-x\log_4 x$.

(א) נתון: $f(e^2)=0$, לכן:

$$\frac{e^2}{\ln a}-e^2\log_4 e^2=0 \quad / :e^2$$

$$\frac{1}{\ln a}-2\cdot\frac{\ln e}{\ln 4}=0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{\ln a}-\frac{1}{\ln 2}=0 \;\Rightarrow\; \ln a=\ln 2 \;\Rightarrow\; a=2$$

(ב) תחום ההגדרה של הפונקציה: $x>0$.

(ג)

$$f'(x)=\left(\frac{x}{\ln 2}-x\log_4 x\right)'=\left(\frac{x}{\ln 2}-\frac{x\ln x}{2\ln 2}\right)'=$$

$$=\frac{1}{2\ln 2}\cdot(2x-x\ln x)'=\frac{1}{2\ln 2}\cdot\left(2-\ln x-x\cdot\frac{1}{x}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\ln 2}\cdot(2-\ln x-1)=\frac{1}{2\ln 2}(1-\ln x)$$

$$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; 1-\ln x=0 \;\Rightarrow\; \ln x=1 \;\Rightarrow\; x=e$$

$$x=e \;\Rightarrow\; y=\frac{e}{\ln 2}-\frac{e\ln e}{2\ln 2}=\frac{e}{2\ln 2}$$

הנקודה החשודה לקיצון: $\left(e,\frac{e}{2\ln 2}\right)$.

x	$x=0$	$0<x<e$	$x=e$	$x>e$
$f'(x)$	נקודת אי-הגדרה	$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	max	↘

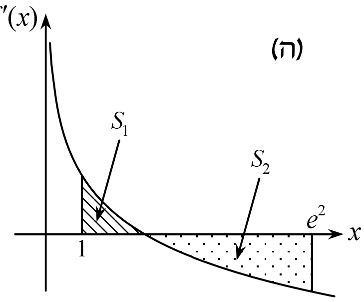
$$f'\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{2\ln 2}(1+1)>0$$

$$f'\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{2\ln 2}(1+1)>0$$

תשובה: $\max\left(e,\frac{e}{2\ln 2}\right)$.

(ד) תחום עלייה: $0<x<e$, תחום ירידה: $x>e$.

(ה)



$$S_1=\int_1^e f'(x)\,dx=f(x)\Big|_1^e=f(e)-f(1)=$$

$$=\frac{e}{\ln 2}-\frac{e\ln e}{2\ln 2}-\left(\frac{1}{\ln 2}-1\cdot 0\right)=\frac{e-2}{2\ln 2}$$

$$S_2=\left|\int_e^{e^2} f'(x)\,dx\right|=\left|f(x)\Big|_e^{e^2}\right|=$$

$$=\left|f(e^2)-f(e)\right|=\left|\frac{e^2}{\ln 2}-\frac{e^2\ln e^2}{2\ln 2}-\frac{e}{\ln 2}+\frac{e\ln e}{2\ln 2}\right|=$$

$$=\left|\frac{e}{2\ln 2}(2e-2e-2+1)\right|=\left|-\frac{e}{2\ln 2}\right|=\frac{e}{2\ln 2}$$

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{e}{2\ln 2}\cdot\frac{2\ln 2}{e-2}=\frac{e}{e-2}$$ מ.ש.ל

(4) נתונה הפונקציה $f(x)=\left(x^2-3\right)e^x$.

(א) (i) תחום הגדרה: כל x .

(ii) $f'(x)=2x\cdot e^x+(x^2-3)\cdot e^x=e^x(2x+x^2-3)=$

$=e^x(x^2+2x-3)=e^x(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; e^x(x+3)(x-1)=0$

$x+3=0 \;\Rightarrow\; x=-3 \;\Rightarrow\; y=6e^{-3}$

$x-1=0 \;\Rightarrow\; x=1 \;\Rightarrow\; y=-2e$

x	$x<-3$	$x=-3$	$-3<x<1$	$x=1$	$x>1$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	max	↘	min	↗

$f'(-4)=e^{-4}\cdot(-1)\cdot(-5)>0 \quad , \quad f'(0)=e^0\cdot 3\cdot(-1)<0$

נקודות הקיצון: $\max\left(-3,\frac{6}{e^3}\right)$, $\min\left(1,-2e\right)$.

(iii) תחומי עלייה: $x>1$, $x<-3$, תחום ירידה: $-3<x<1$.

(iv) $x=0 \;\Rightarrow\; y=-3\cdot e^0=-3 \;\Rightarrow\; (0,-3)$

$y=0 \;\Rightarrow\; (x^2-3)e^x=0 \;\Rightarrow\; x^2-3=0 \;\Rightarrow\; x=\pm\sqrt{3}$

$e^x>0$ לכל x , לכן שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים הן: $(0,-3)$, $(\sqrt{3},0)$, $(-\sqrt{3},0)$.

(v) $y=0$ ($\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$).

(ב) מהטבלה נסיק ש- $f'(x)>0$ בתחומים: $x>1$, $x<-3$,

ו- $f'(x)<0$ בתחום $-3<x<1$.

כמו כן, $f'(x)\xrightarrow[x\to\infty]{}\infty$ וגם $f'(x)\xrightarrow[x\to-\infty]{}0$.

לכן גרף II מתאר את $f'(x)$.

(ג) $S=-\int_{-3}^{1} f'(x)dx=-f(x)\Big|_{-3}^{1}=-f(1)+f(-3)=$

$=2e+\frac{6}{e^3}\approx 5.74$ יחידות שטח

(5) (א) נתון: $f'(\frac{\pi}{4})=a^2$.

$$f'(x)=a^2\sin ax \;\Rightarrow\; a^2\sin\frac{\pi a}{4}=a^2 \;\Rightarrow\; \sin\frac{\pi a}{4}=1 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{\pi a}{4}=\frac{\pi}{2}+2\pi n \;\Rightarrow\; a=2+8n \;,\; n\in\mathbb{Z}$$

התחום הנתון $0<a<3$, לכן רק ערך אחד מתאים: $a=2$.

מכאן: $f(x)=1-2\cos 2x$.

(ב) שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y :

$$x=0 \;\Rightarrow\; y=1-2\cos 0=1-2=-1 \;\Rightarrow\; (0,-1)$$

שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x :

$$1-2\cos 2x=0 \;\Rightarrow\; \cos 2x=\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; 2x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$$

$$x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n \;,\; n\in\mathbb{Z}$$

בתחום $[0,\pi]$ נמצאות הנקודות:

$$x_1=\frac{\pi}{6} \;\Rightarrow\; \left(\frac{\pi}{6},0\right) \qquad x_2=\frac{5\pi}{6} \;\Rightarrow\; \left(\frac{5\pi}{6},0\right)$$

(ג)

$$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; 4\sin 2x=0 \;\Rightarrow\; \sin 2x=0$$

$$2x=\pi n \;\Rightarrow\; x=\frac{\pi n}{2} \;,\; n\in\mathbb{Z}$$

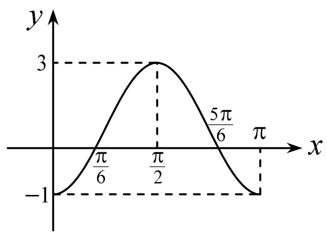
בתחום $[0,\pi]$ נמצאות הנקודות:

$x=0 \;\Rightarrow\; y=-1 \;\Rightarrow\; (0,-1)$ מינימום מוחלט קצה

$x=\frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; y=1-2\cos\pi=3 \;\Rightarrow\; \left(\frac{\pi}{2},3\right)$ מקסימום

$x=\pi \;\Rightarrow\; y=1-2\cos 2\pi=-1 \;\Rightarrow\; (\pi,-1)$ מינימום מוחלט קצה

(ד)



(ה)

$$S=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} f(x)\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}(1-2\cos 2x)\,dx=(x-\sin 2x)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}=$$

$$=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}-\left(\sin\frac{5\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$$

$=\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}\approx 3.826$ יחידות שטח

גבי יקואל

משבצת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

◈ לכל הכיתות ◈ לכל השאלונים ◈ לכל הרמות