פתרון מבחן מס׳ 28 (ספר לימוד – שאלון 035805)

20-05-2017

(1)

$$a_8 = a_1 + 7d = 2x + 7\cdot 3y = 2x + 21y$$

$$b_2 = b_1 q = xy \quad \Rightarrow \quad 2x + 21y = 8xy \quad ①$$

$$a_6 = a_1 + 5d = 2x + 5\cdot 3y = 2x + 15y$$

$$b_3 = b_1 q^2 = xy^2 \quad \Rightarrow \quad 2x + 15y = 3xy^2 \quad ②$$

נפתור את מערכת המשוואות ① ו- ② :

$$-\begin{cases} 2x + 21y = 8xy \\ 2x + 15y = 3xy^2 \end{cases}$$

$$6y = 8xy - 3xy^2 \quad /:y$$ ($y \neq 0$ כמנה של סדרה הנדסית)

$$6 = 8x - 3xy$$

$$3xy = 8x - 6 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{8x-6}{3x}$$

נציב במשוואה ① :

$$2x + 21\cdot\frac{8x-6}{3x} = 8x\cdot\frac{8x-6}{3x} \quad /\cdot 3x$$

$$6x^2 + 168x - 126 = 64x^2 - 48x$$

$$58x^2 - 216x + 126 = 0 \quad /:2$$

$$29x^2 - 108x + 63 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{108 \pm 66}{58} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3 \ , \ x_2 = \frac{42}{58} = \frac{21}{29}$$

$$x_1 = 3 \quad \Rightarrow \quad y_1 = \frac{8\cdot 3 - 6}{3\cdot 3} = 2$$

$$x_2 = \frac{21}{29} \quad \Rightarrow \quad y_2 = \frac{8\cdot\frac{21}{29} - 6}{3\cdot\frac{21}{29}} = \frac{168-174}{63} = -\frac{2}{21}$$

הנתון שהסדרה ההנדסית עולה, להן $q = y > 1$,

לכן הפתרון $y_2 = -\frac{2}{21}$ נפסל. קיבלנו את הפתרון: $x = 3 \ , \ y = 2$.

$$S_n^{(b)} = 1{,}533 \quad \Rightarrow \quad b_1\cdot\frac{q^n - 1}{q-1} = 1{,}533 \quad \Rightarrow \quad 3\cdot\frac{2^n - 1}{2-1} = 1{,}533$$

$$2^n - 1 = 511 \quad \Rightarrow \quad 2^n = 512 = 2^9 \quad \Rightarrow \quad n = 9$$

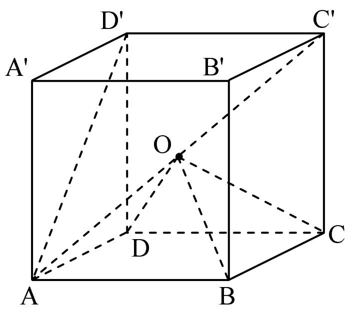
$$S_9^{(a)} = (2a_1 + 8d)\cdot\frac{9}{2} = (2\cdot 6 + 8\cdot 6)\cdot\frac{9}{2} = 270$$

(2) (א) נתון: $P = 6 \cdot S_{\text{בסיס}}$, לכן: $2 \cdot S_{\text{בסיס}} + 4 \cdot S_{\text{פאה}} = 6 \cdot S_{\text{בסיס}}$

$$4 \cdot S_{\text{פאה}} = 4 \cdot S_{\text{בסיס}} \quad \Rightarrow \quad S_{\text{פאה}} = S_{\text{בסיס}} \quad \Rightarrow \quad a \cdot h = a^2 \quad \Rightarrow \quad h = a$$

מכאן שכל מקצועות התיבה שווים, לכן התיבה היא קובייה.

(ב) הזווית המבוקשת (בין AC' לבין המישור $ADD'A'$) היא הזווית בין AC' לבין היטלו על המישור $ADD'A'$, כלומר AD' , כלומר $\measuredangle C'AD'$.
לפי משפט פיתגורס ב- $\Delta ADD'$:



$$AD'^2 = AD^2 + DD'^2 \quad \Rightarrow \quad AD'^2 = a^2 + a^2 \quad \Rightarrow \quad AD' = a\sqrt{2}$$

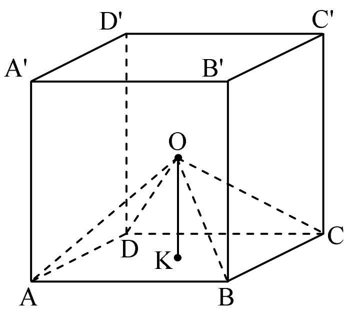
במשולש $AD'C'$: $\tan \measuredangle A = \frac{D'C'}{AD'} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\measuredangle A = \measuredangle D'AC' \approx 35.264°$$

(ג) $V = 512$ סמ"ק $\Rightarrow a^3 = 512$ סמ"ק $\Rightarrow a = 8$ ס"מ

אלכסון הקובייה: $AC' = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$ ס"מ

(ד) $V_{OABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot h$.
OK – גובה הפירמידה $OABCD$, הוא אורך האנך מנקודה O לבסיס $ABCD$.
OK הוא קטע אמצעים ב- $\Delta AC'C$ (חוצה צלע AC' ומקביל לצלע CC'),
לכן: $OK = \frac{1}{2} C'C = \frac{1}{2} a$



(קטע אמצעים במשולש שווה למחצית הצלע אותה הוא לא חותך).

$$V_{OABCD} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{6} = \frac{8^3}{6} = 85\frac{1}{3} \text{ סמ"ק}$$

(3) נבחר יחידת זמן $=1$ שעה.

תרבית א': $M_0^{(1)}=24{,}000\ ,\ M_2^{(1)}=29{,}040$

$$M_2^{(1)}=M_0^{(1)}\cdot q_1^{\ 2}\ \Rightarrow\ 29{,}040=24{,}000\cdot q_1^{\ 2}$$

$$q_1^{\ 2}=\frac{29{,}040}{24{,}000}\ \Rightarrow\ q_1=1.1$$

תרבית ב': $M_0^{(2)}=6{,}000\ ,\ M_2^{(2)}=8{,}640$

$$M_2^{(2)}=M_0^{(2)}\cdot q_2^{\ 2}\ \Rightarrow\ 8{,}640=6{,}000\cdot q_2^{\ 2}$$

$$q_2^{\ 2}=\frac{8{,}640}{6{,}000}\ \Rightarrow\ q_2=1.2$$

(א) $M_t^{(1)}=2\cdot M_t^{(2)}\ \Rightarrow\ M_0^{(1)}q_1^{\ t}=2\cdot M_0^{(2)}q_2^{\ t}$

$$24\cdot 1.1^t=2\cdot 6\cdot 1.2^t\ \Rightarrow\ \frac{1.2^t}{1.1^t}=2\ \Rightarrow\ \left(\frac{1.2}{1.1}\right)^t=2$$

$$t=\frac{\ln 2}{\ln\frac{1.2}{1.1}}=7.966\approx 8\ \text{שעות}\ \Rightarrow\ 8+8=16$$

בשעה 16:00 בתרבית א' יהיו פי 2 חיידקים מאשר בתרבית ב'.

(ב) $9^{00}\ :\ m_2=M_1^{(1)}+M_1^{(2)}=24{,}000\cdot 1.1+6{,}000\cdot 1.2=33{,}600$

$$8^{00}\ :\ m_1=M_0^{(1)}+M_0^{(2)}=24{,}000+6{,}000=30{,}000$$

כמות החיידקים גדלה ב- $33{,}600-33{,}000=3{,}600$.

כמות זו מהווה: $\frac{3.6}{30}\cdot 100\%=12\%$ מהכמות ההתחלתית.

(4) (א)

$$\sin^4 x-\cos^4 x=(\sin^2 x-\cos^2 x)\cdot(\sin^2 x+\cos^2 x)=$$
$$=-(\cos^2 x-\sin^2 x)\cdot 1=-\cos 2x$$

(ב)

$$f(x)=\sin^4 x-\cos^4 x-\mathrm{k} \ \Rightarrow\ f(x)=-\cos 2x-\mathrm{k}$$

(*i*)

$$f'(x)=(-\cos 2x-\mathrm{k})'=2\sin 2x$$
$$f'(x)=0 \ \Rightarrow\ 2\sin 2x=0 \ \Rightarrow\ \sin 2x=0$$
$$2x=\pi\mathrm{n} \ \Rightarrow\ x=\frac{\pi\mathrm{n}}{2}\ ,\ \mathrm{n}\in\mathbb{Z}$$

בתחום הנתון נמצאות הנקודות החשודות לקיצון הבאות:

$$x=0 \ \Rightarrow\ y=-1-\mathrm{k}$$
$$x=\frac{\pi}{2} \ \Rightarrow\ y=1-\mathrm{k}$$
$$x=\pi \ \Rightarrow\ y=-1-\mathrm{k}$$
$$x=\frac{3\pi}{2} \ \Rightarrow\ y=1-\mathrm{k}$$

x	$0<x<\frac{\pi}{2}$	$x=\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}<x<\pi$	$x=\pi$	$\pi<x<\frac{3\pi}{2}$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	max	↘	min	↗

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\frac{\pi}{2}>0$$
$$f'\left(\frac{3\pi}{4}\right)=2\sin\frac{3\pi}{2}<0$$
$$f'\left(\frac{5\pi}{4}\right)=2\sin\frac{5\pi}{2}>0$$

תשובה: מינימום קצה $(0,-1-\mathrm{k})$, מקסימום $\left(\frac{\pi}{2},1-\mathrm{k}\right)$,
מינימום $\left(\pi,-1-\mathrm{k}\right)$, מקסימום קצה $\left(\frac{3\pi}{2},1-\mathrm{k}\right)$.

(*ii*) שתי נקודות הקיצון הקרובות מימין לראשית הצירים הן:

$$\left(\frac{\pi}{2},1-\mathrm{k}\right)\ ,\ \left(\pi,-1-\mathrm{k}\right)$$
$$\mathrm{m}=\frac{1-\mathrm{k}+1+\mathrm{k}}{\frac{\pi}{2}-\pi}=\frac{2}{-\frac{\pi}{2}}=-\frac{4}{\pi}$$
$$-\frac{4}{\pi}=-\frac{8\mathrm{k}}{\pi} \ \Rightarrow\ \mathrm{k}=\frac{1}{2}$$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(*iii*) שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y :

$$x=0 \quad \Rightarrow \quad y=-1-\tfrac{1}{2}=-\tfrac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \left(0,-\tfrac{3}{2}\right)$$

שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x :

$$y=0 \quad \Rightarrow \quad -\cos 2x-\tfrac{1}{2}=0 \quad \Rightarrow \quad \cos 2x=-\tfrac{1}{2}$$

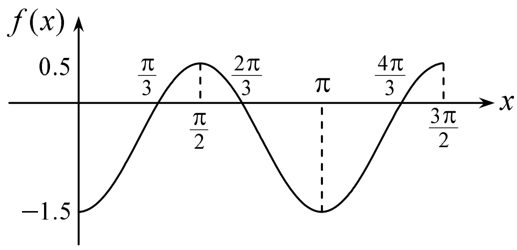
$$2x=\tfrac{2}{3}\pi+2\pi\mathrm{n} \quad \Rightarrow \quad x=\tfrac{1}{3}\pi+\pi\mathrm{n} \ , \ \mathrm{n}\in\mathbb{Z}$$

$$2x=\tfrac{4}{3}\pi+2\pi\mathrm{k} \quad \Rightarrow \quad x=\tfrac{2}{3}\pi+\pi\mathrm{k} \ , \ \mathrm{k}\in\mathbb{Z}$$

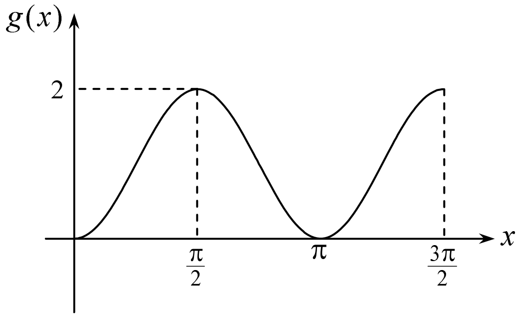
נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון :

$$\left(0,-1\tfrac{1}{2}\right) \ , \ \left(\tfrac{\pi}{3},0\right) \ , \ \left(\tfrac{2\pi}{3},0\right) \ , \ \left(\tfrac{4\pi}{3},0\right)$$

(*iv*)



(ג) (*i*) לכל ערך של x מתחום ההגדרה, ערך הפונקציה $g(x)$ גדול ב- 1.5 יחידות מערך הפונקציה $f(x)$. לכן, כדי לקבל את גרף הפונקציה $g(x)$, יש להעלות את גרף הפונקציה $f(x)$ ב- 1.5 יחידות (או להוריד את ציר ה- x ב- 1.5 יחידות).



(*ii*)

$$S=\int_0^{\pi}(-\cos 2x+1)\,dx=\left(-\tfrac{1}{2}\sin 2x+x\right)\Big|_0^{\pi}=$$

$$=-\tfrac{1}{2}\sin 2\pi+\pi-\left(-\tfrac{1}{2}\sin 0+0\right)=\ \pi$$ יחידות שטח

(5) (א)

$$\frac{f'(0)}{f'(1)}=\frac{3}{4} \ \Rightarrow \ \frac{a-b}{4a-2b}=\frac{3}{4}$$

$$4a-4b=12a-6b \ \Rightarrow \ 2b=8a \ \Rightarrow \ b=4a$$

נמצא את שיעור ה- x של נקודת חיתוך גרף הפונקציה הנגזרת עם ציר ה- x:

$$y=0 \ \Rightarrow \ a\cdot 4^x-b\cdot 2^x=0 \ \Rightarrow \ a\cdot 4^x-4a\cdot 2^x=0 \quad /:a \ (a\neq 0)$$

$$4^x-4\cdot 2^x=0 \ \Rightarrow \ 2^x(2^x-4)=0$$

$2^x>0$ לכל x, לכן: $\quad 2^x-4=0 \ \Rightarrow \ 2^x=4 \ \Rightarrow \ x=2$

השטח בין גרף הפונקציה הנגזרת לבין הצירים הוא:

$$I=-\int_0^2(a\cdot 4^x-b\cdot 2^x)\,dx=-\int_0^2(a\cdot 4^x-4a\cdot 2^x)\,dx=$$

$$=-a\int_0^2(4^x-4\cdot 2^x)\,dx=-a\left(\frac{4^x}{\ln 4}-4\cdot\frac{2^x}{\ln 2}\right)\Big|_0^2=$$

$$=-a\left[\frac{16}{\ln 4}-\frac{16}{\ln 2}-\left(\frac{1}{\ln 4}-\frac{4}{\ln 2}\right)\right]=-a\left[\frac{8}{\ln 2}-\frac{16}{\ln 2}-\left(\frac{1}{2\ln 2}-\frac{4}{\ln 2}\right)\right]=$$

$$=-a\left(-\frac{8}{\ln 2}+\frac{7}{2\ln 2}\right)=\frac{9a}{2\ln 2}$$

$$\frac{9a}{2\ln 2}=9 \ \Rightarrow \ a=2\ln 2 \ , \ b=8\ln 2$$

(ב) $f'(x)=0 \ \Rightarrow \ x=2$ (מצאנו בסעיף (א)).

עבור $x<2$ מתקיים: $f'(x)<0$ (הפונקציה $f(x)$ יורדת),

ועבור $x>2$ מתקיים: $f'(x)>0$ (הפונקציה $f(x)$ עולה),

אז $x=2$ הוא שיעור ה- x של נקודת המינימום של הפונקציה $f(x)$.

(ג) $f(x)$ עולה עבור $x>2$, $f(x)$ יורדת עבור $x<2$.

(ד) (i)

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(2\ln 2\cdot 4^x-8\ln 2\cdot 2^x)\,dx=$$

$$=2\ln 2\cdot\frac{4^x}{\ln 4}-8\ln 2\cdot\frac{2^x}{\ln 2}+C=4^x-8\cdot 2^x+C$$

נתון: $f(2)=-6$, מכאן:

$$4^2-8\cdot 2^2+C=-6 \ \Rightarrow \ -16+C=-6 \ \Rightarrow \ C=10$$

כלומר: $f(x)=4^x-8\cdot 2^x+10$.

המשך בעמוד הבא >>>

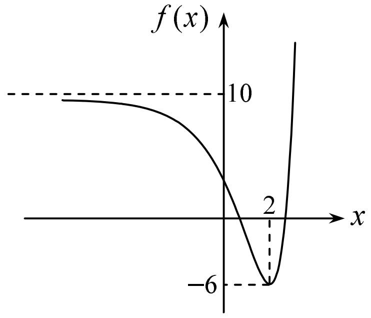
(*ii*)

$$\lim_{x\to\infty}(4^x - 8\cdot 2^x + 10) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(4^x - 8\cdot 2^x + 10) = 0 - 8\cdot 0 + 10 = 10$$

משוואת אסימפטוטה אופקית שמאלית לגרף הפונקציה : $y=10$.

(*iii*)



(*iv*) ישר שמשוואתו $y=\mathrm{k}$ מקביל לציר ה- x .
לישר כזה ולגרף הפונקציה $f(x)$ תהיה נקודה משותפת אחת,
אם $\mathrm{k}\ge 10$ או $\mathrm{k}=-6$.

גבי יקואל

משבצת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929