פתרון מבחן מס' 27 (ספר לימוד – שאלון 035805)

20-05-2017

(1) (א)

$$b_n = a_n - 2 \;\Rightarrow\; \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1} - 2}{a_n - 2} = \frac{5a_n - 8 - 2}{a_n - 2} =$$

$$= \frac{5\,(a_n - 2)}{a_n - 2} = 5 = \text{const}$$

כלומר, הסדרה b_n היא סדרה הנדסית ומנתה 5 .

(ב)

$$b_1 = a_1 - 2 = 3 - 2 = 1 \;,\; b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \;\Rightarrow\; b_n = 5^{n-1}$$

(*i*) האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים מהווים סדרה הנדסית

שמנתה $5^2 = 25$. מכאן :

$$S_n^{\text{אי זוגיים}} = b_1 \cdot \frac{25^n - 1}{25 - 1} = \frac{1}{24}(25^n - 1) = \frac{5^{2n} - 1}{24}$$

(*ii*) האיברים העומדים במקומות הזוגיים מהווים סדרה הנדסית

שהאיבר הראשון בה הוא $b_2 = b_1 \cdot 5 = 5$, ומנתה $q = 5^2 = 25$.

מכאן :

$$S_n^{\text{זוגיים}} = b_2 \cdot \frac{25^n - 1}{25 - 1} = \frac{5\,(5^{2n} - 1)}{24}$$

(ג)

$$b_n = a_n - 2 \;\Rightarrow\; a_n = b_n + 2 = 5^{n-1} + 2$$

(ד)

$$-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots - a_{2n-1} + a_{2n} =$$

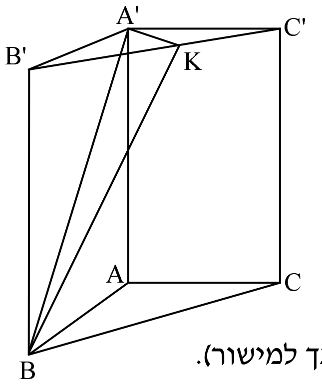
$$= -(a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1}) + (a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}) =$$

$$= -(b_1 + 2 + b_3 + 2 + \ldots + b_{2n-1} + 2) +$$

$$+(b_2 + 2 + b_4 + 2 + \ldots + b_{2n} + 2) =$$

$$= -(b_1 + b_3 + \ldots + b_{2n-1} + \cancel{2n}) + (b_2 + b_4 + \ldots + b_{2n} + \cancel{2n}) =$$

$$= -S_n^{\text{אי זוגיים}} + S_n^{\text{זוגיים}} = -\frac{5^{2n} - 1}{24} + \frac{5\,(5^{2n} - 1)}{24} = \frac{4\,(5^{2n} - 1)}{24} = \frac{5^{2n} - 1}{6}$$



(2) (א) זיהוי הזווית שבין $A'B$ לבין מישור הפאה $BCC'B'$: במשולש $A'B'C'$ נעביר גובה $A'K$ לבסיס $B'C'$.

$B'K \perp A'K$ (לפי בניית העזר)

$BB' \perp A'B'C' \;\Rightarrow\; BB' \perp A'K$

לכן : $A'K \perp BCC'B'$ (אם ישר מאונך לשני ישרים לא מקבילים במישור, אז הוא מאונך למישור).

מכאן : $A'K \perp BK$, כלומר : $\measuredangle A'KB = 90°$.

מכאן, BK הוא ההיטל של BA' על המישור $BCC'B'$,

לכן הזווית הנתונה היא $\measuredangle A'BK$.

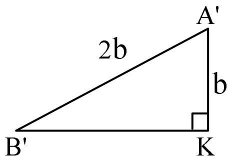
לפי משפט פיתגורס ב- $\Delta BB'A'$: $A'B^2 = BB'^2 + B'A'^2$

$$A'B^2 = 9b^2 + 4b^2 = 13b^2 \quad \Rightarrow \quad A'B = b\sqrt{13}$$

במשולש ישר-זווית $BA'K$ ($\measuredangle K = 90°$):

$$\sin\measuredangle B = \frac{A'K}{A'B} \quad \Rightarrow \quad A'K = A'B \cdot \sin\measuredangle B =$$

$$= b\sqrt{13} \cdot \sin 16.10211° = b$$



נתבונן ב- $\Delta A'B'K$: הניצב $A'K$ שווה למחצית היתר $A'B'$, לכן הזווית מול הניצב היא בת $30°$, כלומר $\measuredangle B' = 30°$.

$$\measuredangle A' = \measuredangle B'A'K = 90° - 30° = 60°$$

במשולש שווה-שוקיים $A'B'C'$ ($A'B' = A'C'$) גובה לבסיס ($A'K$) הוא גם חוצה זווית הראש,

לכן : $\measuredangle B'A'C' = 2 \cdot \measuredangle B'A'K = 2 \cdot 60° = 120°$.

(ב)

$$V = S_{\text{בסיס}} \cdot H = S_{\Delta ABC} \cdot AA' = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin\measuredangle A}{2} \cdot AA' =$$

$$= \frac{2b \cdot 2b \cdot \sin 120°}{2} \cdot 3b = 6b^3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3b^3\sqrt{3}$$

$$3b^3\sqrt{3} = 24\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad b^3 = 8 \quad \Rightarrow \quad b = 2$$

(3) נתונות הפונקציות:

$$f(x)=x(\ln^2 x-\mathrm{a}\ln x+5)$$
$$g(x)=4x(\ln x-1)$$

(א) (i)

$$f'(x)=1\cdot(\ln^2 x-\mathrm{a}\ln x+5)+x\cdot(2\ln x\cdot\tfrac{1}{x}-\tfrac{\mathrm{a}}{x})=$$
$$=\ln^2 x-\mathrm{a}\ln x+5+2\ln x-\mathrm{a}=$$
$$=\ln^2 x+\ln x(2-\mathrm{a})+5-\mathrm{a}$$

(ii)

$$g'(x)=4[1\cdot(\ln x-1)+x\cdot\tfrac{1}{x}]=4(\ln x-1+1)=4\ln x$$

(ב) (i)

$$f'(1)=3 \quad\Rightarrow\quad \ln^2 1+\ln 1(2-\mathrm{a})+5-\mathrm{a}=3$$
$$0+0\cdot(2-\mathrm{a})+5-\mathrm{a}=3 \quad\Rightarrow\quad 5-\mathrm{a}=3 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{a}=2$$

(ii)

$$f''(x)=(\ln^2 x+3)'=2\ln x\cdot\tfrac{1}{x}$$
$$f''(1)=2\cdot 0\cdot 1=0$$

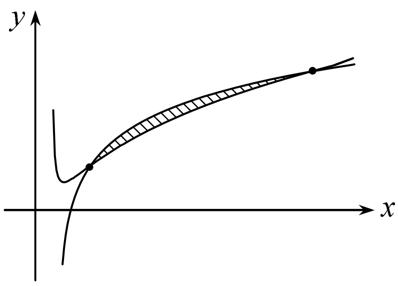
הנקודה $x=1$ היא נקודה חשודה לקיצון בפונקציה $f'(x)$.

x	x = 0	0 < x < 1	x = 1	x > 1
$f''(x)$	נקודת אי-הגדרה	−	0	+
$f'(x)$		↘	min	↗

$$f''(0.5)=2\cdot\ln 0.5\cdot 2<0 \quad , \quad f''(2)=2\cdot\ln 2\cdot 0.5>0$$

לכן בנקודה $x=1$ לפונקציה $f'(x)$ יש נקודת מינימום.

(ג) (i)



$$f'(x)=g'(x)$$
$$\ln^2 x+3=4\ln x$$
$$\ln^2 x-4\ln x+3=0$$
$$(\ln x)_{1,2}=\frac{4\pm 2}{2}$$
$$(\ln x)_1=3 \;,\; (\ln x)_2=1$$

$$\ln x=1 \quad\Rightarrow\quad x=e \quad\Rightarrow\quad y=4\ln e=4$$
$$\ln x=3 \quad\Rightarrow\quad x=e^3 \quad\Rightarrow\quad y=4\ln e^3=12$$

תשובה: $(e,4)$, $(e^3,12)$.

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(ii) $\mathrm{I}=\int_{e}^{e^3}[f'(x)-g'(x)]dx=[f(x)-g(x)]\Big|_e^{e^3}=$

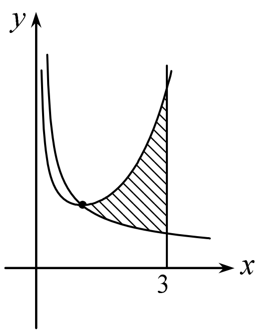
$=f(e^3)-g(e^3)-f(e)+g(e)=$

$=e^3(3^2-2\cdot 3+5)-4e^3(3-1)-e(1^2-2\cdot 1+5)+4e(1-1)=$

$=8e^3-8e^3-4e+0=-4e$

האינטגרל שלילי, לכן: $S=-\mathrm{I}=$ $4e$ יחידות שטח

(4) נתונות הפונקציות:



$f(x)=e^{x-\mathrm{a}}+\frac{2}{\sqrt{x}}=e^{x-\mathrm{a}}+2x^{-\frac{1}{2}}$

ו- $g(x)=\frac{9}{\sqrt{10x-1}}=9(10x-1)^{-\frac{1}{2}}$.

(א) תחום הגדרה:

$f(x)$: $x\ge 0$ וגם $\sqrt{x}\ne 0$

כלומר תחום ההגדרה: $x>0$,

$g(x)$: $10x-1\ge 0$ וגם $\sqrt{10x-1}\ne 0$

$10x-1>0 \;\Rightarrow\; x>\frac{1}{10}$

(ב) (i) $f'(x)=e^{x-\mathrm{a}}-x^{-1.5}=e^{x-\mathrm{a}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}$

$f'(1)=0 \;\Rightarrow\; e^{1-\mathrm{a}}-1=0$

$e^{1-\mathrm{a}}=1 \;\Rightarrow\; 1-\mathrm{a}=0 \;\Rightarrow\; \mathrm{a}=1$

(ii) $f''(x)=e^{x-1}+1.5x^{-2.5}=e^{x-1}+\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}$

$f''(1)=e^0+\frac{3}{2}>0 \;\Rightarrow\; \min$

(iii) $g(1)=\frac{9}{\sqrt{10-1}}=\frac{9}{3}=3$

$f(1)=e^0+\frac{2}{1}=1+2=3$

$f(1)=g(1)$, לכן הגרפים נחתכים בנקודה $(1,3)$,

שהיא נקודת המינימום של הפונקציה $f(x)$.

המשך בעמוד הבא ▸▸▸

(ג) $$\mathrm{I}=\int_1^3[f(x)-g(x)]dx=\int_1^3\left[e^{x-1}+2x^{-\frac{1}{2}}-9(10x-1)^{-\frac{1}{2}}\right]dx=$$

$$=\left(e^{x-1}+\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-\frac{9\,(10x-1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\cdot 10}\right)\Bigg|_1^3=\left(e^{x-1}+4\sqrt{x}-\frac{18\,\sqrt{10x-1}}{10}\right)\Bigg|_1^3=$$

$$=e^2+4\sqrt{3}-\frac{9\,\sqrt{29}}{5}-\left(1+4-\tfrac{27}{5}\right)=$$

$=e^2+4\sqrt{3}-\frac{9\,\sqrt{29}}{5}+0.4\approx 5.024$ יחידות שטח

(5) נתונה הפונקציה $f(x)=\sin^3 x+5\sin x$ בתחום $-\pi\le x\le\pi$.

(א) + (ב) $f'(x)=3\sin^2 x\cdot\cos x+5\cos x$

$f'(x)=0\ \Rightarrow\ \cos x(3\sin^2 x+5)=0$

$3\sin^2 x+5=0$ לא יכול להתקיים, כי $3\sin^2 x\ge 0$ לכל x ,

לכן גם $3\sin^2 x+5>0$ לכל x .

$\cos x=0\ \Rightarrow\ x=\frac{\pi}{2}+\pi n\ ,\ n\in\mathbb{Z}$

בתחום הנתון:

$x=\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ y=1^3+5\cdot 1=6$

$x=-\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ y=(-1)^3+5\cdot(-1)=-6$

$\left(\frac{\pi}{2},6\right)\ ,\ \left(-\frac{\pi}{2},-6\right)$.

נחשב את ערכי הפונקציה בנקודות הקצה של תחום ההגדרה:

$x=\pi\ \Rightarrow\ y=0^3+5\cdot 0=0\ \Rightarrow\ (\pi,0)$

$x=-\pi\ \Rightarrow\ y=0^3+5\cdot 0=0\ \Rightarrow\ (-\pi,0)$

הפונקציה $f(x)$ רציפה, לכן: $y=6\ \Rightarrow\ \max$

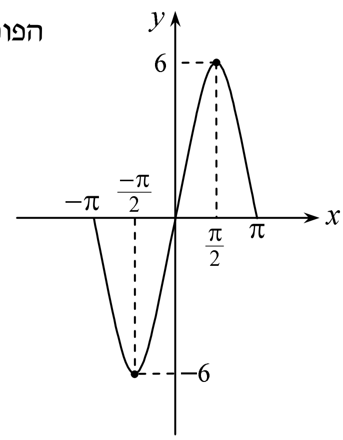
$y=-6\ \Rightarrow\ \min$

$(-\pi,0)$ מקסימום קצה

$\left(-\frac{\pi}{2},-6\right)$ מינימום מוחלט

$\left(\frac{\pi}{2},6\right)$ מקסימום מוחלט

$(\pi,0)$ מינימום קצה



המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(ג) משיקים בנקודת הקיצון מקבילים לציר ה- x

ומשוואותיהם: $y=6$, $y=-6$.

המרחק בין מקבילים אלה: $d_1 = 6-(-6) = 12$ יחידות אורך

המרחק בין האנכים לציר ה- x בנקודות הקצה:

$d_2 = \pi-(-\pi) = 2\pi$ יחידות אורך

היקף המלבן היוצר: $P = 2(12+2\pi) = 24+4\pi$ יחידות אורך

(ד) **<u>דרך I</u>:**

$$\sin x \le 1 \quad \Rightarrow \quad \sin^3 x \le 1$$

$$\sin x \le 1 \quad \Rightarrow \quad 5\sin x \le 5$$

מכאן: $\sin^3 x + 5\sin x \le 6$,

כלומר למשוואה: $\sin^3 x + 5\sin x = 7$ אין פתרון.

<u>דרך II</u>:

מהגרף רואים שהערך המקסימלי של הפונקציה הוא 6 .

בנוסף, המחזור של הפונקציה הוא 2π , לכן: $f(x) \le 6$ לכל x ,

ואז אין פתרון למשוואה $f(x) = 7$, כלומר אין פתרון

למשוואה הנתונה.

גבי יקואל

משבצת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

◈ לכל הכיתות ◈ לכל השאלונים ◈ לכל הרמות