

פתרון מבחן מס' 26 (ספר לימוד – שאלון 035805)

20-05-2017

- (1) (א) המרחקים שעברה המשאית הראשונה בכל שעה (עד הפגישה) מהווים סדרה חשבונית שבה: $a_1 = 40$ ק"מ ו- $d_1 = 6$ ק"מ.
- גם המרחקים שעברה המשאית השנייה בכל שעה (עד הפגישה) מהווים סדרה חשבונית שבה: $b_1 = 60$ ק"מ ו- $d_2 = -5$ ק"מ.
- בסדרה השנייה יש 5 איברים פחות מאשר בסדרה הראשונה, כי המשאית השנייה הייתה בדרך (עד הפגישה) 5 שעות פחות מהמשאית הראשונה. נסמן ב- n את מספר השעות שעברו מרגע יציאת המשאית הראשונה ועד המפגש בין שתי המשאיות.

$$S_n^a = [2a_1 + (n-1)d_1] \cdot \frac{n}{2}$$

$$S_{n-5}^b = [2b_1 + (n-6)d_2] \cdot \frac{n-5}{2}$$

לפי נתוני השאלה, נרכיב את המשוואה:

$$[2a_1 + (n-1)d_1] \cdot \frac{n}{2} + [2b_1 + (n-6)d_2] \cdot \frac{n-5}{2} = 653$$

$$[80 + 6(n-1)] \cdot \frac{n}{2} + [120 - 5(n-6)] \cdot \frac{n-5}{2} = 653$$

$$3n^2 + 37n + \frac{(150 - 5n)(n-5)}{2} = 653$$

$$n^2 + 249n - 2,056 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{-249 \pm 265}{2} \Rightarrow n_1 = 8, n_2 = -257$$

הפתרון $n_2 = -257$ נפסל כי מספר שעות צריך להיות מספר חיובי.

תשובה: המשאיות ייפגשו 8 שעות מרגע יציאת המשאית הראשונה.

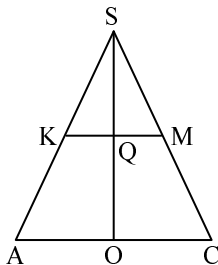
(ב) ב- 8 השעות עד רגע הפגישה, המשאית הראשונה תעבור:

$$S_8^a = (80 + 6 \cdot 7) \cdot \frac{8}{2} = 488 \text{ ק"מ}$$

ב- 3 שעות $8 - 5 = 3$ המשאית השנייה תעבור:

$$S_3^b = (120 - 5 \cdot 2) \cdot \frac{3}{2} = 165 \text{ ק"מ}$$

בדיקה: $488 + 165 = 653$.



$$V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO \Rightarrow 240 = \frac{1}{3} S \cdot 15 \quad (\text{א}) \quad (2)$$

$$S_{ABCD} = 48 \text{ סמ"ר}$$

(ב) נתבונן ב- $\triangle ASC$ (חתך ASC).

$$KM \parallel AC \Rightarrow \triangle SKQ \sim \triangle SAO$$

$$\frac{SK}{SA} = \frac{SQ}{SO} = \frac{1}{2}$$

מכאן ש- KM הוא קטע אמצעים ב- $\triangle SAC$.

מקדם הדמיון בין $\triangle SKM$ ל- $\triangle SAC$ הוא $k = \frac{1}{2}$,

לכן השטחים של המלבנים $KLMN$ ו- $ABCD$ מתייחסים כ- $k^2 = \frac{1}{4}$.

$$\frac{V_{SKLMN}}{V_{SABCD}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot S_{KLMN} \cdot SQ}{\frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO} = \frac{S_{KLMN}}{S_{ABCD}} \cdot \frac{SQ}{SO} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$V_{SKLMN} = \frac{1}{8} \cdot V_{SABCD} = \frac{1}{8} \cdot 240 = 30 \text{ סמ"ק}$$

$$AC = 2 \cdot AO = 4\sqrt{6} \quad (i) \quad (ג)$$

לפי משפט פיתגורס ב- $\triangle ACD$: $AD^2 + DC^2 = AC^2 = 16 \cdot 6 = 96$

$$AD \cdot DC = 48 \quad \text{כמו כן, מסעיף (א) נסיק כי:}$$

נסמן: $AD = x$, $DC = y$ ונקבל את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 96 \\ xy = 48 \end{cases} \quad / \cdot 2 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 96 \\ 2xy = 96 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 2xy = 0 \Rightarrow (x - y)^2 = 0 \Rightarrow x = y$$

$$x = y \Rightarrow AD = DC \Rightarrow \text{ABCD ריבוע}$$

$$\tan \angle K = \frac{OQ}{KQ} = \frac{\frac{1}{2} SO}{\frac{1}{2} AO} = \frac{SO}{AO} = \frac{15}{2\sqrt{6}} \quad (ii) \text{ ב- } \triangle OQK$$

$$\angle K = \angle OKQ \approx 71.91^\circ$$

$$M_6 = \frac{100\% + 45\%}{100\%} \cdot M_0 \Rightarrow M_6 = 1.45M_0 \quad (3)$$

$$M_6 = 1.45M_0 \Rightarrow M_0 \cdot q^6 = 1.45M_0 \Rightarrow q = 1.063885 \quad (א)$$

$$M_t = M_0 \cdot q^t = 1.78M_0 \Rightarrow q^t = 1.78$$

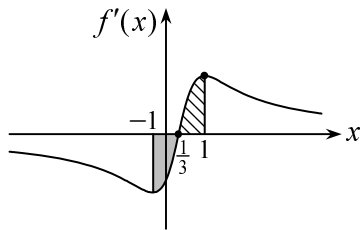
$$t = \frac{\ln 1.78}{\ln 1.063885} \approx 9.31 \text{ שנים}$$

$$M_{18} = M_0 \cdot q^{18} = M_0 \cdot 1.063885^{18} = 3.0486M_0 \quad (ב)$$

כלומר החווה התייקרה פי 3.0486 .

(ג) החווה התייקרה ב- $3.0486M_0 - M_0 = 2.0486M_0$, המהווים :

$$\frac{2.0486M_0}{M_0} = 2.0486 \Rightarrow 204.86\%$$



(4) (א) לפונקציה $f(x)$ יש נקודות קיצון

בנקודות שבהן $f'(x)$ שווה ל-0

ומחליפה את סימנה.

לפי הגרף יש נקודה אחת כזו: $x = \frac{1}{3}$,

וזהו נקודת מינימום: בתחום $x < \frac{1}{3}$ הנגזרת שלילית, כלומר הפונקציה

יורדת, ובתחום $x > \frac{1}{3}$ הנגזרת חיובית, כלומר הפונקציה עולה.

$$f'(x) = \frac{2ax - b}{ax^2 - bx + 5} \quad (ב)$$

$$f'\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow \frac{2}{3}a - b = 0 \Rightarrow 2a = 3b$$

$$\int_{\frac{1}{3}}^1 f'(x) dx = f(x) \Big|_{\frac{1}{3}}^1 = f(1) - f\left(\frac{1}{3}\right) = \quad (ג)$$

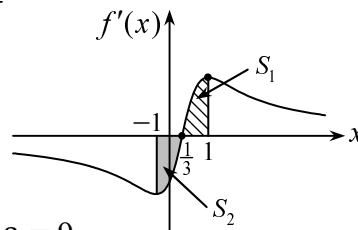
$$= \ln|a - b + 5| - \ln\left|\frac{a}{9} - \frac{b}{3} + 5\right| =$$

$$= \ln \frac{(a-b+5) \cdot 9}{a-3b+45}$$

$$\ln \frac{(a-b+5) \cdot 9}{a-3b+45} = \ln 2 \Rightarrow \frac{9 \cdot (a - \frac{2}{3}a + 5)}{a - 2a + 45} = 2$$

$$9a - 6a + 45 = -2a + 90 \Rightarrow 5a = 45 \Rightarrow a = 9$$

$$b = \frac{2}{3}a = \frac{2}{3} \cdot 9 = 6$$



$$S_2 = -\int_{-1}^{\frac{1}{3}} f'(x) dx = -f(x) \Big|_{-1}^{\frac{1}{3}} = f(-1) - f\left(\frac{1}{3}\right) = \quad (ד)$$

$$= \ln(9 + 6 + 5) - \ln(1 - 2 + 5) =$$

$$= \ln 20 - \ln 4 = \ln \frac{20}{4} = \ln 5 \text{ יחידות שטח}$$

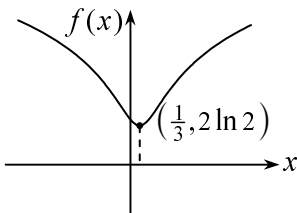
(ה) ראו סרטוט משמאל.

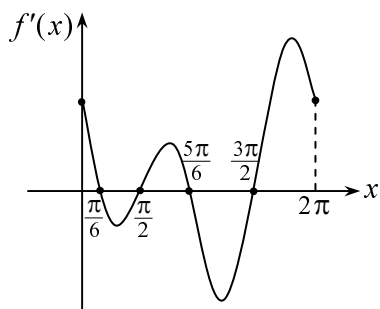
(ו) הישר $y = k$ מקביל לציר ה- x ,

ואם למשוואה $f(x) = k$ יש רק

פתרון אחד, אז הישר משיק לגרף הפונקציה

בנקודת המינימום שלה, כלומר: $k = 2 \ln 2$.





$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \quad (\text{א}) \quad (5)$$

$$a \cos \frac{\pi}{6} - b \sin \frac{\pi}{3} = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} a - \frac{\sqrt{3}}{2} b = 0$$

$$a = b$$

$$f''(x) = -a \sin x - 2b \cos 2x \quad (\text{ב})$$

$$f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 6, \quad a = b \Rightarrow -a \sin \frac{3\pi}{2} - 2a \cos 3\pi = 6$$

$$a + 2a = 6 \Rightarrow a = 2$$

$$(\text{ג}) \quad \text{נקודות קיצון בקצוות: } x_{\max} = 2\pi, \quad x_{\min} = 0$$

נקודות קיצון פנימית מתקיימת כאשר $f'(x) = 0$ ומחליפה את סימנה.

$$x_{\max} = \frac{\pi}{6}, \quad x_{\min} = \frac{\pi}{2}, \quad x_{\max} = \frac{5\pi}{6}, \quad x_{\min} = \frac{3\pi}{2}$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (2 \cos x - 2 \sin 2x) dx = \quad (\text{ד})$$

$$= 2 \sin x + \cos 2x + C$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow 2 \sin \frac{\pi}{2} + \cos \pi + C = 0$$

$$2 - 1 + C = 0 \Rightarrow C = -1$$

$$f(x) = 2 \sin x + \cos 2x - 1$$

(ה) שיעורי נקודת החיתוך עם ציר ה- y :

$$x = 0 \Rightarrow y = 2 \sin 0 + \cos 0 - 1 = 0 + 1 - 1 = 0 \Rightarrow (0, 0)$$

שיעורי נקודות החיתוך עם ציר ה- x :

$$y = 0 \Rightarrow 2 \sin x + \cos 2x - 1 = 0$$

$$2 \sin x + 1 - 2 \sin^2 x - 1 = 0$$

$$2 \sin x (1 - \sin x) = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \text{ או } \sin x = 1$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{בתחום הנתון: } x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad x = \pi, \quad x = 2\pi$$

$$\text{בסך הכול: } (2\pi, 0), \quad (\pi, 0), \quad \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \quad (0, 0)$$

גבי יקואל

מ ש ב צ ת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

לכל הכיתות ✦ לכל השאלונים ✦ לכל הרמות